

Paris 1971

T H E S E

PRESENTÉE

A LA FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Georges PARETTE

**DIFFUSION CRITIQUE DES NEUTRONS PAR LE FER :
ETUDE DES REGIONS "HYDRODYNAMIQUE" ET "CRITIQUE"**

Soutenue le 13 mai 1971, devant la Commission d'Examen

MM. B. JANCOVICI

Président

A. HERPIN

B. JACROT

P. RESIBOIS

Examineurs

T H E S E

PRESENTÉE

A LA FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Georges PARETTE

**DIFFUSION CRITIQUE DES NEUTRONS PAR LE FER :
ETUDE DES REGIONS "HYDRODYNAMIQUE" ET "CRITIQUE"**

Soutenue le 13 mai 1971, devant la Commission d'Examen

MM. B. JANCOVICI Président

A. HERPIN

B. JACROT Examineurs

P. RESIBOIS



REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Service de Physique des Solides et de Résonance Magnétique sous la direction de Messieurs A. HERPIN et J. WINTER qui m'ont toujours apporté aide et encouragement; qu'ils soient ici remerciés ainsi que Monsieur le Professeur B. JANCOVICI qui a bien voulu présider mon jury de thèse.

C'est après une étude critique des résultats publiés par les équipes du Brookhaven National Laboratory que Messieurs B. JACROT et J. VILLAIN nous ont suggéré les expériences que nous avons réalisées et analysées. Après l'impulsion initiale ils ont soutenu nos efforts par l'intérêt qu'ils portaient aux résultats ; qu'ils veuillent trouver ici l'expression de notre reconnaissance.

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur P. RESIBOIS à deux titres : il a bien voulu venir assister à ma soutenance de thèse, en tant que membre du jury ; il nous avait communiqué des compléments d'information sur les calculs qu'il avait effectués en collaboration avec C. PIETTE, nous permettant ainsi une claire compréhension de nos résultats.

Nous remercions Monsieur D. CRIBIER pour l'intérêt qu'il a manifesté pour nos expériences, par ses conseils et ses critiques.

Ce travail est le fruit d'une constante et étroite collaboration avec R. KAHN. Il a su notamment aborder de façon originale le problème délicat des corrections de résolution qui jouent un rôle essentiel dans l'analyse des résultats expérimentaux. Son aide a été précieuse et je tiens à le remercier chaleureusement.

Les analyses numériques sur ordinateur ont occupé une grande place dans notre travail : dans ce domaine la contribution de Monsieur M. TOURNARIE a été déterminante et nous tenons à lui manifester notre plus vive reconnaissance.

Nous voulons remercier Monsieur J. MIHAILOVIC pour le four original qu'il a conçu, ainsi que Monsieur J. JACQUIER qui en a assuré la construction.

Sans le concours permanent de Messieurs J. et D. MONS et de Monsieur L. ROULEAU ces expériences n'auraient pu être menées à leurs termes : qu'ils trouvent ici l'expression de notre gratitude.

Nous tenons à associer dans nos remerciements les noms de Messieurs
A. BOUSQUET et H. BOURDONNAY pour l'aide qu'ils nous ont apportée.

Enfin nous remercions Madame PORNEUF et Madame BUNEL qui ont eu la
tâche de dactylographier le texte en prenant la peine d'en corriger les
erreurs de style les plus criantes.

P L A N

INTRODUCTION	1
--------------------	---

Première Partie

I - DIFFUSION MAGNETIQUE DES NEUTRONS	5
A - SECTION EFFICACE MAGNETIQUE	5
B - FONCTION DE DIFFUSION $S(\vec{k}, \omega)$	6
C - LA REPONSE LINEAIRE	8
D - SECTION EFFICACE MAGNETIQUE ET FONCTIONS RELAXATION	9
E - DIFFUSION CRITIQUE	11
F - FORMULATION DIFFERENTE DE LA SECTION EFFICACE MAGNETIQUE	12
II - LA SUSCEPTIBILITE STATIQUE χ_q	14
A - APPROXIMATION DU CHAMP MOLECULAIRE	14
B - REGLE DE SOMME ET APPROXIMATION DE BOGOLIUBOV-TYABLIKOV	16
C - FORMULE DE ORNSTEIN-ZERNIKE	17
D - VALIDITE DE LA FORMULE DE ORNSTEIN-ZERNIKE	19
III - LA RELAXATION	22
A - THEORIE CONVENTIONNELLE	23
B - THEORIE DES "LOIS D'ECHELLE" : IDEES DIRECTRICES	26
C - APPLICATION DES HYPOTHESES DES LOIS D'ECHELLE	28
D - LIMITES DE LA THEORIE DES LOIS D'ECHELLE ET THEORIES MICROSCOPIQUES.	36
E - VARIATIONS DES CONSTANTES D ET A AVEC LA TEMPERATURE	40
IV - SITUATION EXPERIMENTALE	43
A - CONFRONTATION DE LA THEORIE AVEC LES EXPERIENCES DEJA REALISEES	43
B - OBJET DES NOUVELLES EXPERIENCES REALISEES A SACLAY	48

Deuxième Partie

I - DESCRIPTION DES DIVERS ELEMENTS DE L'EXPERIENCE	52
A - DESCRIPTION DU FOUR ET MESURE DE LA TEMPERATURE	52
B - DISPOSITIF EXPERIMENTAL - CHOIX DES DIVERS PARAMETRES	54

II - RESOLUTION INSTRUMENTALE	61
A - ETUDE DE LA TRANSMISSION DU SELECTEUR MECANIQUE	61
B - RESOLUTION DE L'ENSEMBLE INSTRUMENTAL	65
C - MESURE DE LA RESOLUTION	70
III - METHODE D'ANALYSE DES SPECTRES OBSERVES	74
A - CONVERSION TEMPS DE VOL - ENERGIE	74
B - CONSIDERATIONS PRELIMINAIRES	77
C - INTEGRATION SUR L'ANGLE α	78
D - INTEGRATION SUR L'ENERGIE INCIDENTE	83
E - INTEGRATION SUR LE CHANGEMENT D'ENERGIE ω	86
F - ANALYSE DES SPECTRES	89

Troisième Partie

I - ANALYSE DES RESULTATS AU-DESSUS DE LA TEMPERATURE DE CURIE T_c	93
A - DETERMINATION DE LA TEMPERATURE DE CURIE	93
B - METHODE D'EXPLORATION DES REGIONS HYDRODYNAMIQUE ET QUASI-HYDRODYNAMIQUE	94
C - MISE EN EVIDENCE DE LA REGION QUASI-HYDRODYNAMIQUE	97
D - MISE EN EVIDENCE DE LA REGION HYDRODYNAMIQUE	100
E - LOIS DE VARIATION DU PARAMETRE Λ AVEC LA TEMPERATURE	102
II - DISCUSSION ET COMPARAISON	104
A - PARAMETRE K_1	104
B - CONSTANCE DE DIFFUSION Λ	106
III - ANALYSE DES RESULTATS A LA TEMPERATURE DE CURIE	109
A - ANALYSE DES SPECTRES DIFFUSES A LA TEMPERATURE DE CURIE	109
B - INTERPRETATION DES RESULTATS	112
CONCLUSION	116
APPENDICE	118
REFERENCES	127
LEGENDE DES FIGURES	130

INTRODUCTION

En l'absence de tout champ magnétique extérieur la transformation qui fait passer dans une substance ferromagnétique de l'état ferromagnétique (phase stable à basse température) à l'état paramagnétique (phase stable à haute température) est une transition du second ordre. En général dans toute transition du second ordre on définit ce qu'on appelle un paramètre d'ordre ψ dont la valeur à l'équilibre $\langle \psi \rangle_T^*$, en l'absence de toute contrainte a les propriétés suivantes :

(i) Elle est nulle dans la phase désordonnée de haute température et de valeur finie dans la phase ordonnée de basse température. Plus exactement il existe une température de transition T_c dite encore température critique en-dessous de laquelle la valeur à l'équilibre $\langle \psi \rangle_T$ est différente de zéro :

$$\langle \psi \rangle_T \neq 0 \quad \text{pour} \quad T < T_c$$

$$\langle \psi \rangle_T = 0 \quad \text{pour} \quad T > T_c .$$

(ii) Sa variation avec la température T au voisinage de la température critique est telle que nous avons la relation :

$$\lim_{T \rightarrow T_c^-} \langle \psi \rangle_T = 0 .$$

* La valeur à l'équilibre d'une grandeur observable A du système placé au contact d'un thermostat à la température T , est égale à sa valeur moyenne définie par la relation :

$$\langle A \rangle_T \equiv \frac{\text{Tr}(Ae^{-\beta \mathcal{H}})}{\text{Tr}(e^{-\beta \mathcal{H}})}$$

où (a) $\beta \equiv 1/k_B T$, (b) $\mathcal{H}$ est l'hamiltonien du système.

En d'autres termes la variation avec la température de la valeur moyenne du paramètre d'ordre est continue.

(iii) Si on applique au système une petite contrainte extérieure h (qui est pour l'énergie libre une variable conjuguée de $\langle \psi \rangle_T$), la susceptibilité mesurant la réponse du système s'écrit :

$$\chi_T^\psi = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial h} \langle \psi \rangle_T \right) .$$

La susceptibilité devient infinie à la température critique T_c .

Pour un système ferromagnétique le paramètre d'ordre ψ est l'aimantation totale $\vec{M}$, c'est un vecteur dont la valeur moyenne à l'équilibre $\langle \vec{M} \rangle_T$ détermine la direction Oz d'aimantation. Aux températures inférieures à la température critique T_c qu'on a l'habitude d'appeler à présent température de Curie les différentes composantes de l'aimantation $\vec{M}$ dans un trièdre Oxyz où Oz est la direction d'aimantation vérifient les conditions suivantes :

$$\langle M_x \rangle_T = \langle M_y \rangle_T = 0$$

$$\langle M_z \rangle_T \neq 0 .$$

Par contre au-dessus de la température de Curie l'isotropie du système est totale et :

$$\langle M_x \rangle_T = \langle M_y \rangle_T = \langle M_z \rangle_T = 0 .$$

Au voisinage de la température de Curie le système exhibe des fluctuations importantes de l'aimantation $\vec{M}$. C'est une caractéristique essentielle de toute transition du second ordre qu'au voisinage de la température critique le paramètre d'ordre ψ présente de larges fluctuations. Ces fluctuations sont associées à la divergence de la susceptibilité χ_T^ψ . Pour notre système ferromagnétique les fluctuations de l'aimantation $\vec{M}$ sont liées à la divergence de la susceptibilité $\chi_T^{\vec{M}}$ par la formule :

$$\langle M^2 \rangle_T = N k_B T \chi_T^{\vec{M}} .$$

P R E M I E R E P A R T I E

Cette formule est valable dans la phase paramagnétique. N est le nombre de spins du système. Il existe aussi des fluctuations d'énergie interne qui se traduisent par une divergence de la chaleur spécifique $C_{\vec{M}}$.

Ainsi à la température de Curie les propriétés du système à l'équilibre thermique qu'on exprime par diverses grandeurs thermodynamiques, présentent des anomalies. Il est naturel de penser qu'il en sera de même pour les grandeurs traduisant le retour à l'équilibre du système et qui sont exprimées à l'aide de coefficients de transport.

Les neutrons froids ($\lambda > 4 \text{ \AA}$) se prêtent bien, d'une manière générale, à l'étude des propriétés dynamiques de la matière condensée. Du fait qu'ils possèdent un spin ils constituent un outil précieux dans l'étude des excitations d'un système magnétique, et en particulier celle des fluctuations de l'aimantation. De par leur grande longueur d'onde et leur faible énergie cinétique les neutrons froids permettent de mesurer les étendues spatiales importantes et les temps d'amortissements longs qui caractérisent les fluctuations d'aimantation au voisinage de la température de Curie T_c . En particulier ces fluctuations sont la cause du phénomène "d'opalescence critique" qu'on observe par diffusion de neutrons.

Aussi bien sur le plan théorique que dans le domaine expérimental un grand travail a été fait afin d'expliquer les mécanismes régissant les phénomènes critiques. Notamment on s'est efforcé de vérifier chaque progrès théorique par des expériences nouvelles. L'objet du présent travail est la vérification expérimentale de calculs théoriques récents.

Le plan de l'ouvrage est composé de trois parties, chaque partie se subdivisant en un certain nombre de chapitres.

Dans la première partie nous procédons à une mise au point théorique et rappelons les expériences essentielles déjà réalisées. Cette première partie se termine sur un bref exposé des raisons qui nous ont amené à faire de nouvelles expériences à Saclay.

La seconde partie de l'ouvrage est toute spécialement consacrée à la description du dispositif expérimental et à la façon dont nous avons analysé les expériences. Les problèmes liés à la résolution sont très importants et

un soin particulier a été apporté à la connaissance des divers types de corrections instrumentales.

La troisième partie outre la présentation des résultats, comprend une interprétation de ceux-ci.

I - DIFFUSION MAGNETIQUE DES NEUTRONS

A - SECTION EFFICACE MAGNETIQUE

Le neutron qui possède un moment magnétique subit l'influence des moments magnétiques présents dans les substances qu'il traverse. L'interaction du nucléon et des moments magnétiques nucléaires est négligeable devant l'interaction avec les moments magnétiques électroniques. Dans la limite des basses énergies l'interaction neutron-électron est essentiellement électromagnétique, elle conduit à une valeur de section efficace magnétique qui est du même ordre de grandeur que celle de la section efficace nucléaire. Halpern et Johnson^[1], les premiers ont effectué les calculs de section efficace magnétique. Van Hove^[2] en explicitant la notion de fonction de corrélation de deux grandeurs a établi l'expression reliant la section efficace magnétique et les fonctions de corrélation de deux spins. Dans le calcul de Van Hove les moments magnétiques sont localisés aux sites du réseau cristallin. De Gennes^[3] plus récemment a établi une expression de la section efficace magnétique valable au cas des métaux. Si les moments magnétiques sont localisés sur les ions occupant les sites d'un réseau cristallin rigide* et dans le cas où (i) la contribution orbitale au moment magnétique de l'ion est petite devant la contribution du spin, (ii) les neutrons ne sont pas polarisés, la section efficace magnétique s'écrit :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} = A(\vec{k}, \vec{k}') \sum_{\alpha, \beta=x,y,z} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{K^2} \right) \sum_{\vec{R}, \vec{R}'} e^{i\vec{K} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-i\omega t} \langle S_R^{\alpha}(0) S_R^{\beta}(t) \rangle_T \quad (I.1)$$

(1) $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ sont les vecteurs d'onde du neutron incident et du neutron diffusé

(2) $\vec{K}$ est le vecteur de diffusion défini par : $\vec{K} = \vec{k} - \vec{k}'$

(3) $\hbar\omega$ est le transfert d'énergie du neutron au système pendant la diffusion ;

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 - k'^2) \quad \text{où } m \text{ est la masse du neutron}$$

(4) $d\Omega$ est l'élément d'angle solide autour de la direction définie par le vecteur $\vec{K}$ où la diffusion des neutrons est observée

*(Cela revient à négliger les couplages magnéto vibrationnels).

(5) $\vec{S}_{\vec{R}}$ est le spin de l'ion magnétique situé sur le site $\vec{R}$ du réseau cristallin. $A(t)$ est l'opérateur A dans la représentation d'Heisenberg :

$$A(t) \equiv e^{i\frac{t}{\hbar} \mathcal{H}} A e^{-i\frac{t}{\hbar} \mathcal{H}}$$

Dans cette expression $\mathcal{H}$ est l'hamiltonien du système et $A(0)$ s'identifie à l'opérateur A .

(6) La valeur moyenne $\langle \vec{S}_{\vec{R}}(0) \cdot \vec{S}_{\vec{R}'}(t) \rangle_T$ calculée à l'équilibre exprime la corrélation qui existe entre la valeur et la direction à l'instant initial $t=0$ du spin situé en $\vec{R}$ et la valeur et la direction à l'instant ultérieur t du spin situé en $\vec{R}'$. Cette valeur moyenne définit une fonction de corrélation de deux spins.

$$(7) \quad A(\vec{k}, \vec{k}') \equiv \left(1, 91 \frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \frac{k'}{k} |f(\vec{k})|^2$$

$\frac{e^2}{m_e c^2}$, le rayon classique de l'électron est égal à $2,82 \times 10^{-13}$ cm, valeur qui est comparable dans le domaine des basses énergies aux longueurs de diffusion nucléaires. $f(\vec{k})$ est le facteur de forme magnétique de l'ion, il vaut 1 si $\vec{k}=0$.

Dans la suite nous supposons que les ions magnétiques sont identiques et que le réseau constitué par ces ions est un réseau de Bravais, c'est-à-dire un réseau où tous les sites sont équivalents (invariance de translation). Tous les systèmes cubiques comme les réseaux magnétiques du fer ou du nickel sont des réseaux de Bravais, c'est la raison pour laquelle nous nous limitons à ceux-ci.

B - FONCTION DE DIFFUSION $\mathcal{S}(\vec{k}, \omega)$

Introduisons la composante de Fourier de vecteur $\vec{k}$ du spin $\vec{S}_{\vec{R}}(t)$:

$$\vec{S}_{\vec{k}}(t) \equiv \sum_{\vec{R}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \vec{S}_{\vec{R}}(t)$$

La fonction de diffusion $\mathcal{S}^{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)$ est définie par la relation :

$$\mathfrak{S}^{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-i\omega t} \langle S_{-\vec{k}}^{\alpha}(0) S_{\vec{k}}^{\beta}(t) \rangle_T .$$

Cette fonction constitue un élément d'une matrice 3×3 qu'on peut appeler matrice de diffusion. La matrice de diffusion $\hat{\mathfrak{S}}(\vec{k}, \omega)$ est une matrice hermitique, cela résulte de ce que la section efficace est une quantité réelle :

$$S^{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) = [\mathfrak{S}^{\beta\alpha}(\vec{k}, \omega)]^* .$$

Il est facile de montrer une autre propriété des fonctions $\mathfrak{S}^{\alpha\beta}$ et qui s'exprime par la relation :

$$\mathfrak{S}^{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) = e^{i\hbar\omega} \mathfrak{S}^{\beta\alpha}(-\vec{k}, -\omega) .$$

Dans le cas d'un système ferromagnétique isotrope caractérisé par le fait que son hamiltonien est invariant pour toute rotation d'ensemble du système la matrice $\hat{\mathfrak{S}}(\vec{k}, \omega)$ se simplifie notablement. La fonction de diffusion $\mathfrak{S}^{\alpha\beta}$ possède la propriété supplémentaire suivante :

$$\mathfrak{S}^{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) = - \mathfrak{S}^{\beta\alpha}(\vec{k}, \omega) .$$

Ainsi dans la section efficace ne figurent plus que les termes diagonaux $\mathfrak{S}^{\alpha\alpha}(\vec{k}, \omega)$. En effet les termes croisés $\mathfrak{S}^{\alpha\beta}$ n'apparaissent que dans les sommes $(\mathfrak{S}^{\alpha\beta} + \mathfrak{S}^{\beta\alpha})$ qui sont nulles.

Si Oz est la direction d'aimantation dans la phase ordonnée ($T < T_c$), la section efficace (I.2) s'écrit :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} = A(\vec{k}, \vec{k}') \left\{ \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) \mathfrak{S}^{zz}(\vec{k}, \omega) + \left(1 + \frac{k_z^2}{k^2}\right) \mathfrak{S}^{xx}(\vec{k}, \omega) \right\} \quad (I.3)$$

$$\text{car } \mathfrak{S}^{xx}(\vec{k}, \omega) = \mathfrak{S}^{yy}(\vec{k}, \omega) \neq \mathfrak{S}^{zz}(\vec{k}, \omega) .$$

Dans la phase désordonnée ($T > T_c$), elle s'écrit :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} = 2A(\vec{k}, \vec{k}') \mathfrak{S}^{zz}(\vec{k}, \omega) \quad (I.4)$$

$$\text{car } \mathfrak{S}^{xx}(\vec{k}, \omega) = \mathfrak{S}^{yy}(\vec{k}, \omega) = \mathfrak{S}^{zz}(\vec{k}, \omega) .$$

Une substance ferromagnétique peut être considérée comme un milieu isotrope dans la mesure où l'hamiltonien se limite à l'hamiltonien d'Heisenberg :

$$\mathcal{H}_H = - \sum_{\vec{R}, \vec{R}'} J_{RR'} \vec{S}_{\vec{R}} \cdot \vec{S}_{\vec{R}'} \quad (I.5)$$

c'est-à-dire si les termes d'anisotropie provenant notamment des interactions dipolaires entre spins sont négligeables devant le terme d'échange.

C - LA REPONSE LINEAIRE

Il n'est pas dans notre intention de reproduire dans cet ouvrage la théorie de la réponse linéaire. Dans la littérature, outre les articles originaux de Kubo^[4], il existe de nombreux articles traitant de la réponse linéaire appliquée aux systèmes magnétiques^{[5][6]}. Nous montrons seulement comment grâce au théorème de fluctuation-dissipation les fonctions de diffusion $\mathcal{S}(\vec{K}, \omega)$ et la section efficace sont reliées à des grandeurs caractéristiques du système telles la susceptibilité et la fonction relaxation.

Kubo définit la fonction de corrélation intégrée de deux opérateurs A et B par l'expression suivante :

$$(A, B(t)) \equiv \int_0^\beta d\lambda \langle e^{\lambda \mathcal{H}} A e^{-\lambda \mathcal{H}} B(t) \rangle - \beta \langle A \rangle \langle B \rangle .$$

La variation dans le temps des fonctions $(S_{-\vec{K}}^\gamma(0), S_{\vec{K}}^\alpha(t))$ traduit à une température $T = \frac{1}{\beta k_B}$ la manière dont s'effectue l'évolution du système magnétique vers son état d'équilibre défini par la matrice densité $\rho = e^{-\beta \mathcal{H}} / \text{Tr } e^{-\beta \mathcal{H}}$, une fois disparues à l'instant initial ($t=0$) les perturbations qui tendaient à l'en écarter. Ces fonctions sont appelées fonctions relaxation. On montre que les susceptibilités statiques $\chi_{\vec{K}}^{\alpha\gamma}$, qui relient linéairement les variations des différentes composantes de l'aimantation à la présence d'un petit champ magnétique stationnaire périodique de vecteur $\vec{K}$ imposée au système, sont proportionnelles aux valeurs initiales des fonctions relaxation. Plus précisément on a :

$$\chi_{\vec{K}}^{\alpha\gamma} = \frac{(g\mu_B)^2}{N} \left(S_{-\vec{K}}^\gamma, S_{\vec{K}}^\alpha \right) .$$

Posons :

$$\varphi_{\vec{K}}^{\alpha\gamma}(t) = \frac{(g\mu_B)^2}{N} \frac{(S_{-\vec{K}}^\gamma, S_{\vec{K}}^\alpha(t))}{\chi_{\vec{K}}^{\alpha\gamma}} .$$

Les fonctions $\varphi_{\vec{K}}^{\alpha\gamma}(t)$ sont appelées fonctions relaxation normalisées, en ce sens que $\varphi_{\vec{K}}^{\alpha\gamma}(0) = 1$. Introduisons de même les transformées de Fourier de ces fonctions :

$$\Phi_{\vec{K}}^{\alpha\gamma}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-i\omega t} \varphi_{\vec{K}}^{\alpha\gamma}(t) .$$

Elles sont normées à l'unité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \Phi_{\vec{K}}^{\alpha\gamma}(\omega) = 1 .$$

Dans la mesure où le système est isotrope, ce que nous supposons être toujours le cas dans la suite, seules sont à considérer les fonctions diagonales $\varphi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}(t)$ et $\chi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}$, les fonctions non diagonales $\varphi_{\vec{K}}^{\alpha\gamma}(t)$ n'étant pas observables. Des propriétés générales des fonctions de corrélation intégrées de Kubo, on déduit que (i) $\chi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}$ et $\Phi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}(\omega)$ sont des quantités réelles, (ii) nous avons les relations suivantes :

$$\chi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha} = \chi_{-\vec{K}}^{\alpha\alpha}$$

$$\varphi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}(t) = \varphi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}(-t)^* = \varphi_{-\vec{K}}^{\alpha\alpha}(-t)$$

$$\Phi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}(\omega) = \Phi_{-\vec{K}}^{\alpha\alpha}(-\omega) .$$

Comme le réseau des ions magnétiques est un réseau de Bravais, il apparaît des propriétés supplémentaires : (i) les fonctions $\varphi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}(t)$ deviennent des fonctions réelles et paires suivant t , (ii) les fonctions $\Phi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}(\omega)$ deviennent simplement des fonctions paires suivant ω . Cette condition n'est guère restrictive, même dans le cas d'un métal par exemple les fonctions $\Phi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}(\omega)$ conservent les propriétés énoncées ci-dessus.

D - SECTION EFFICACE MAGNETIQUE ET FONCTIONS RELAXATION

Le théorème de fluctuation-dissipation s'exprime par l'importante relation [5][6].

$$S^{\alpha\alpha}(\vec{K}, \omega) = \frac{\hbar\omega}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \frac{N}{(g\mu_B)^2} \chi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha} \Phi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}(\omega) + \frac{\beta\hbar\omega}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \delta(\omega) \langle S_{-\vec{K}}^{\alpha} \rangle \langle S_{\vec{K}}^{\alpha} \rangle .$$

La section efficace magnétique (I.3) s'écrit alors en deux parties que nous allons expliciter :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} = \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}\right)_1 + \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}\right)_2 \quad (I.6)$$

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}\right)_1 = A(\vec{k}, \vec{k}') \frac{\hbar\omega}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \frac{N}{(g\mu_B)^2} \left[\left(1 - \frac{K_z^2}{K^2}\right) \chi_{\vec{K}}^{zz} \Phi_{\vec{K}}^{zz}(\omega) + \left(1 + \frac{K_z^2}{K^2}\right) \chi_{\vec{K}}^{xx} \Phi_{\vec{K}}^{xx}(\omega) \right] \quad (I.7)$$

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}\right)_2 = A(\vec{k}, \vec{k}') \frac{\beta\hbar\omega}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \delta(\omega) \langle S_{-\vec{K}}^z \rangle \langle S_{\vec{K}}^z \rangle \quad (I.8)$$

La section efficace $\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}\right)_1$ exprime un processus de diffusion inélastique qui existe à toute température et la section efficace $\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}\right)_2$ un processus de diffusion élastique qui existe seulement si la température est inférieure à la température de Curie T_c . L'intégration suivant ω de $\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}\right)_2$ donne :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_2 = \left(1,91 \frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \frac{N}{(g\mu_B)^2} |\langle \vec{M} \rangle|^2 \left(1 - \frac{K_{Oz}^2}{K_O^2}\right) \sum_{\vec{\tau}} \delta(\vec{K}_O - \vec{\tau}) \quad (I.9)$$

Rappelons que $|\langle \vec{M} \rangle|$ est la valeur moyenne de l'aimantation dirigée suivant l'axe Oz, $\vec{\tau}$ est un vecteur du réseau réciproque et $\vec{K}_O$ est le vecteur de diffusion élastique dont le module est égal à $2k \sin\theta/2$, θ étant l'angle de diffusion. Cette section efficace montre comment l'ordre à grande distance affecte la diffusion des neutrons : Les neutrons sont diffusés préférentiellement suivant certaines directions définies par la condition $\vec{K}_O = \vec{\tau}$ appelée condition de Bragg. Expérimentalement on observe dans le spectre de diffusion des maximums appelés "Pics de Bragg". Ces maximums disparaissent dans les deux cas suivants : (i) au-dessus de la température de Curie où $|\langle \vec{M} \rangle| = 0$, (ii) si le vecteur $\vec{K}_O$ est choisi parallèlement à la direction de l'aimantation.

La section efficace $\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}\right)_1$ traduit la manière dont les fluctuations d'aimantation affectent le processus de diffusion des neutrons. L'intégration suivant ω n'est plus aussi simple que précédemment. Néanmoins si la condition $\beta\hbar\omega \ll 1$ est satisfaite et si les changements d'énergie du neutron au cours de la diffusion restent petits devant son énergie incidente, d'une part le facteur $\frac{\hbar\omega}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$ devient égal à $k_B T$ et d'autre part le rapport $\frac{k'}{k}$ figurant dans le terme $A(\vec{k}, \vec{k}')$ diffère peu de l'unité et le vecteur de $\vec{K}$ s'écarte peu

de $\vec{K}_0$. Avec une telle approximation ("approximation statique") l'intégration suivant ω ne présente plus de difficultés particulières. Au-dessus de la température de Curie nous obtenons :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_1 \approx \frac{2}{3} \left(1,91 \frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 |f(\vec{K}_0)|^2 \frac{N}{(g\mu_B)^2} k_B T \chi_{\vec{K}_0}$$

$$\text{où : } \chi_{\vec{K}_0}^{zz} = \chi_{\vec{K}_0}^{xx} = \chi_{\vec{K}_0}^{yy} = \frac{1}{3} \chi_{\vec{K}_0}$$

Il apparaît donc comme une conséquence du théorème de fluctuation-dissipation que par la diffusion des neutrons, il est possible de mesurer les susceptibilités magnétiques du système diffuseur sans qu'il soit nécessaire d'imposer à ce dernier un champ magnétique.

E - DIFFUSION CRITIQUE

Les fonctions $\chi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}$, $\Phi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}(t)$ et $\Phi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}(\omega)$ sont des fonctions périodiques dans le réseau réciproque. En effet nous avons :

$$\chi_{\vec{K}+\vec{\tau}}^{\alpha\alpha} = \chi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha} \quad \text{etc...}$$

Par ailleurs si nous faisons tendre le vecteur $\vec{K}$ vers zéro, $\chi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}$ s'identifie à la susceptibilité usuelle $\chi^{\alpha\alpha}$. En l'absence d'anisotropie nous savons que toutes les susceptibilités $\chi^{\alpha\alpha}$ divergent à la température de Curie :

$$\lim_{T \rightarrow T_C} \frac{1}{\chi^{\alpha\alpha}} = 0 \quad \forall \alpha = x, y, z$$

$$\text{Ainsi nous avons de même : } \lim_{T \rightarrow T_C} \frac{1}{\chi_{\vec{\tau}}^{\alpha\alpha}} = 0 \quad \forall \alpha$$

La température de Curie T_C peut être définie par ces deux dernières relations. Si la condition de Bragg $\vec{K}_0 = \vec{\tau}$ est satisfaite la section efficace $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_1$ devient infiniment grande à la température de Curie T_C . Ainsi au voisinage immédiat de la température de Curie la diffusion des neutrons se concentre autour des pics de Bragg. Ce phénomène constitue ce qu'on appelle "l'opalescence critique" qui fut observée aux petits angles de diffusion ($\vec{\tau} = 0$) [7] [8].

Au-dessus de la température de Curie, on isole la diffusion critique car les pics de Bragg ont disparu. Par contre en-dessous de T_c et dans le cas d'un ferromagnétique, il n'est pas facile de séparer la diffusion critique de la contribution des pics de Bragg à moins de se placer dans des conditions telles que le vecteur de diffusion $\vec{K}_0$ est toujours parallèle à l'aimantation.

L'étude expérimentale de la diffusion critique ne peut se faire qu'autour des directions de Bragg $\vec{r}$ relativement proches de la direction centrale $\vec{r} = 0$ à cause de la décroissance du facteur de forme magnétique $f(\vec{K}_0)$ avec la grandeur du vecteur $\vec{K}_0$. Nous limiterons cette étude à la première zone de Brillouin.

F - FORMULATION DIFFERENTE DE LA SECTION EFFICACE MAGNETIQUE

Introduisons le vecteur $\vec{q} \equiv \vec{K} - \vec{r}$ appartenant à la première zone de Brillouin. Etant donné la périodicité des fonctions $\chi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}$ et $\Phi_{\vec{K}}^{\alpha\alpha}$ dans le réseau réciproque, nous pouvons écrire la section efficace magnétique $\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}\right)_1$ (I.7) au voisinage d'une direction de Bragg $\vec{r}$ sous la forme :

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}\right)_1 \simeq A(\vec{k}, \vec{k}') \frac{N}{(g\mu_B)^2} \frac{\hbar\omega}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \left[\left(1 - \frac{k_z^2}{K^2}\right) \chi_{\vec{q}}^{zz} \Phi_{\vec{q}}^{zz}(\omega) + \left(1 + \frac{k_z^2}{K^2}\right) \chi_{\vec{q}}^{xx} \Phi_{\vec{q}}^{xx}(\omega) \right] . \quad (I.10)$$

L'étude de la diffusion critique portera plus précisément autour de la direction $\vec{r} = 0$, permettant ainsi de ne faire aucune distinction entre les vecteurs $\vec{K}$ et $\vec{q}$. H. Mori et K. Kawasaki [5], entre autres, préfèrent utiliser les composantes $S_{\vec{q}}^+$, $S_{\vec{q}}^-$, $S_{\vec{q}}^0$ au lieu des composantes cartésiennes $S_{\vec{q}}^x$, $S_{\vec{q}}^y$, $S_{\vec{q}}^z$ du vecteur $S_{\vec{q}}$. Ce changement de composantes s'effectue par la transformation suivante :

$$\begin{aligned} S_{\vec{q}}^+ &= S_{\vec{q}}^x + i S_{\vec{q}}^y \\ S_{\vec{q}}^- &= S_{\vec{q}}^x - i S_{\vec{q}}^y \\ S_{\vec{q}}^0 &= S_{\vec{q}}^z \end{aligned} .$$

Avec cette nouvelle notation des composantes de $\vec{S}_{\vec{q}}$, la section efficace (I.10) devient :

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}\right)_1 = \frac{N}{(g\mu_B)^2} A(\vec{k}, \vec{k}') \frac{\hbar\omega}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \left[\left(1 - \frac{q_z^2}{q^2}\right) \chi_{\vec{q}}^0 \Phi_{\vec{q}}^0(\omega) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q_z^2}{q^2}\right) \chi_{\vec{q}}^+ (\Phi_{\vec{q}}^+(\omega) + \Phi_{\vec{q}}^-(\omega)) \right] \quad (I.11)$$

où : (i)

$$\chi_{\vec{q}}^{\alpha} = \frac{(g\mu_B)^2}{N} (S_{\vec{q}}^{\alpha}, S_{\vec{q}}^{\alpha\omega}) \quad (\alpha = +, -, 0)$$

$$\varphi_{\vec{q}}^{\alpha}(t) = \frac{N}{(g\mu_B)^2} \frac{(S_{\vec{q}}^{\alpha}(t), S_{\vec{q}}^{\alpha\omega})}{\chi_{\vec{q}}^{\alpha}}, \quad (\alpha = 1, -, 0)$$

$\Phi_{\vec{q}}^{\alpha}(\omega)$ étant toujours définie comme la transformée de Fourier de la fonction relaxation $\varphi_{\vec{q}}^{\alpha}(t)$. L'utilisation d'un seul indice α (qui peut aussi être faite dans la notation cartésienne puisque seuls interviennent les éléments diagonaux des matrices $\hat{\chi}_{\vec{q}}$ et $\hat{\varphi}_{\vec{q}}(\omega)$) se justifie dans la notation présente du fait de la propriété suivante :

$$S_{\vec{q}}^{\alpha\omega} = S_{-\vec{q}}^{-\alpha}.$$

(ii) nous avons tenu compte de la relation :

$$\chi_{\vec{q}}^{\alpha} = \chi_{\vec{q}}^{-\alpha}$$

valable pour le réseau de Bravais centrosymétrique.

Si la fonction $\Phi_{\vec{q}}^0(\omega)$ est une fonction paire de ω , les fonctions $\Phi_{\vec{q}}^+(\omega)$ et $\Phi_{\vec{q}}^-(\omega)$ ne le sont pas, seule l'est la fonction $(\Phi_{\vec{q}}^+(\omega) + \Phi_{\vec{q}}^-(\omega))$. La notation de Mori et Kawasaki présente l'avantage sur la notation cartésienne de ce qu'elle permet de mettre en évidence directement dans l'expression de la section efficace (I.11) les processus de diffusion quasi-élastique des neutrons par les fluctuations longitudinales d'aimantation et les processus de diffusion inélastiques par les fluctuations transversales. Les premiers donnent le terme $\Phi_{\vec{q}}^0(\omega)$ et les seconds les termes $\Phi_{\vec{q}}^+(\omega)$ et $\Phi_{\vec{q}}^-(\omega)$. A basse température les termes $\Phi_{\vec{q}}^+(\omega)$ et $\Phi_{\vec{q}}^-(\omega)$ correspondent bien en particulier à un processus de diffusion dans lequel la variation d'énergie du neutron résulte soit de la création, soit de l'annihilation d'une onde de spin de vecteur $\vec{q}$.

II - LA SUSCEPTIBILITE STATIQUE $\chi_{\vec{q}}$

Dans ce chapitre l'accent est mis sur le comportement des susceptibilités $\chi_{\vec{q}}^{\alpha}$ au voisinage de la température de Curie (l'indice α repérant indifféremment les composantes cartésiennes ou les composantes $+$, $-$, 0 du vecteur $\vec{S}_{\vec{q}}$). Rappelons que si le vecteur $\vec{q}$ est très petit toutes les susceptibilités $\chi_{\vec{q}}^{\alpha}$ deviennent infinies quand la température se rapproche de la température de Curie dans la mesure où le système est isotrope, d'où le caractère anormal de la diffusion des neutrons. L'influence des fonctions relaxation $\varphi_{\vec{q}}^{\alpha}(t)$ sur la section efficace magnétique est moins marquée.

A - APPROXIMATION DU CHAMP MOLECULAIRE

Partons de l'hamiltonien d'Heisenberg (I.5) auquel on ajoute un terme Zeeman dû au champ magnétique appliqué $\vec{H}$ dirigé suivant Oz, direction de l'aimantation moyenne $\langle \vec{M} \rangle$. L'hamiltonien total s'écrit :

$$\mathcal{H} = - \sum_{R, R'} J_{RR'} \vec{S}_{\vec{R}} \cdot \vec{S}_{\vec{R}'} - g\mu_B H \sum_R S_R^z \quad \text{où} \quad J_{\vec{R}, \vec{R}} = 0$$

Une forme équivalente est :

$$\mathcal{H} = - g\mu_B \sum_R \vec{H}_{\vec{R}} \cdot \vec{S}_{\vec{R}}$$

où $\vec{H}_{\vec{R}}$ est le champ magnétique qui agit effectivement sur le spin $\vec{S}_{\vec{R}}$ localisé sur le site $\vec{R}$; il résulte du champ magnétique imposé $\vec{H}$ et de l'existence des interactions d'échange qui donnent un champ magnétique $\vec{H}_{\vec{R}}^{\text{mol}} = + \frac{2}{g\mu_B} \sum_{R' \neq R} J_{R, R'} \vec{S}_{\vec{R}'}$. L'approximation du champ moléculaire consiste à remplacer dans l'expression du champ magnétique $\vec{H}_{\vec{R}}^{\text{mol}}$: $\vec{S}_{\vec{R}'}$, par sa valeur moyenne $\langle \vec{S}_{\vec{R}'} \rangle_T$.

Les susceptibilités $\chi_{\vec{q}}^{\alpha}$ s'écrivent dans une telle approximation [6] :

(i) Au-dessus de la température de Curie

$$\chi_{\vec{q}}^x = \chi_{\vec{q}}^y = \chi_{\vec{q}}^z = \frac{1/2 (g\mu_B)^2}{J(0) \frac{T_c}{T} + J(0, \vec{q})} \quad . \quad (I.12)$$

(ii) Au-dessous de la température de Curie

$$\chi_{\vec{q}}^x = \chi_{\vec{q}}^y = \frac{1/2(g\mu_B)^2}{J(0, \vec{q})} \quad (I.13)$$

$$\chi_{\vec{q}}^z = \frac{1/2(g\mu_B)^2}{2J(0) \frac{T_c - T}{T_c} + J(0, \vec{q})} \quad (T \lesssim T_c) \quad (I.14)$$

$J(\vec{q})$ est la transformée de Fourier de l'intégrale d'échange $J_{\vec{R}, \vec{R}'}$:

$$J(\vec{q}) = \sum_{\vec{R}} J_{\vec{R}\vec{R}'} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')}$$

la somme simple s'explique par la propriété d'invariance par translation.

Dans le cas d'un réseau de Bravais où chaque site est un centre de symétrie pour le réseau, on a la relation :

$$J(\vec{q}) = J(\vec{q})^* = J(-\vec{q}) \quad .$$

Avec la convention $J_{\vec{R}, \vec{R}} = 0$, on a : $\sum_{\vec{q}} J(\vec{q}) = 0$ où la somme est effectuée

sur les N valeurs possibles de $\vec{q}$ dans la première zone de Brillouin

$$J(\vec{q}, \vec{q}') \equiv J(\vec{q}) - J(\vec{q}') \quad .$$

Quant à la température de Curie, elle est définie par la relation :

$$T_c \equiv \frac{2J(0)}{3k_B} S(S+1) \quad . \quad (I.15)$$

La susceptibilité χ obéit à la loi de Curie Weiss. Au-dessus de la température de Curie sa variation avec la température est donnée par la formule :

$$\chi = \lim_{\vec{q} \rightarrow 0} 3\chi_{\vec{q}}^z = \frac{3}{2(g\mu_B)^2 J(0)} \frac{T_c}{T - T_c} \quad .$$

B - REGLE DE SOMME ET APPROXIMATION DE BOGOLIUBOV-TYABLIKOV

Considérons la situation au-dessus de la température de Curie. La susceptibilité $\chi_{\vec{q}}^z$ doit vérifier la règle de somme suivante :

$$\sum_{\vec{q}} \chi_{\vec{q}}^z = \frac{(g\mu_B)^2 NS(S+1)}{3k_B T} \quad . \quad (I.16)$$

La somme s'effectue dans la première zone. En utilisant l'expression (I.12) pour $\chi_{\vec{q}}^z$ on voit aisément que la règle de somme est satisfaite à haute température ($T \gg T_C$) ; par contre elle ne l'est pas à la température de Curie. Ainsi l'approximation du champ moléculaire n'est pas applicable à proximité de la température de Curie.

H. Mori et K. Kawasaki [5] démontrent une relation générale entre la susceptibilité $\chi_{\vec{q}}^\alpha$ et le premier moment de la fonction relaxation $\Phi_{\vec{q}}^\alpha(\omega)$ ($\alpha = 0, +, -$). Si $\omega_{\vec{q}}$ est le premier moment de la fonction $\Phi_{\vec{q}}(\omega)$, la susceptibilité longitudinale $\chi_{\vec{q}}^0$ ($\equiv \chi_{\vec{q}}^z$) s'écrit au-dessus de la température de Curie :

$$\chi_{\vec{q}}^0 = \frac{(g\mu_B)^2}{\frac{(g\mu_B)^2}{\chi} + \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{s} \right)} \quad (T > T_C) \quad .$$

Dans cette expression :

$$(i) \quad \omega_{\vec{q}} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \Phi_{\vec{q}}(\omega) d\omega$$

(ii) s est la valeur moyenne $\langle S^0 \rangle_T$ de la composante longitudinale d'un spin $\vec{S}$ du système :

$$s = \frac{|\langle \vec{M} \rangle_T|}{Ng\mu_B} \quad .$$

Considérons l'hamiltonien d'Heisenberg (I.5). Si on fait l'approximation que la composante longitudinale $S_{\vec{q}}^0$ reste sensiblement égale à s , le premier moment s'écrit :

$$\hbar\omega_{\vec{q}} \approx 2s J(0, \vec{q}) \quad .$$

Avec cette approximation qui rappelle celle du champ moléculaire la susceptibilité

$\chi_{\vec{q}}^0$ prend une forme analogue à (I.12) :

$$\chi_{\vec{q}}^0 = \frac{1}{\frac{1}{\chi} + \frac{2}{(g\mu_B)^2} J(0, \vec{q})} \quad (T > T_c) \quad .$$

La seule différence avec l'approximation du champ moléculaire est que la susceptibilité χ n'obéit plus à la loi de Curie-Weiss. Dans la présente approximation connuesous le nom d'approximation de Bogoliubov-Tyablikov la température de Curie T_c et la variation de la susceptibilité χ avec la température sont déterminées par la règle de somme (I.16) [9] :

$$\frac{NS(S+1)}{3k_B T_c} = \sum_{\vec{q}} \frac{1}{2J(0, \vec{q})}$$

$$\frac{NS(S+1)}{3k_B T} = \sum_{\vec{q}} \frac{1}{\frac{(g\mu_B)^2}{\chi} + 2J(0, \vec{q})} \quad .$$

Pour un réseau cubique avec une interaction d'échange J entre premiers voisins la valeur de la température de Curie calculée est inférieure à sa valeur dans l'approximation du champ moléculaire (I.15) d'environ 20 %. Quant à la variation de la susceptibilité χ avec la température, on montre facilement qu'elle suit la loi : $\chi \propto \left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)^{-2}$ [3] .

C - FORMULE DE ORNSTEIN-ZERNIKE

Partons de l'expression de la susceptibilité $\chi_{\vec{q}}^0$ suivante :

$$\chi_{\vec{q}}^0 = \frac{1}{\frac{1}{\chi} + \frac{2}{(g\mu_B)^2} J(0, \vec{q})} \quad (T > T_c)$$

Si le vecteur $\vec{q}$ est petit la quantité $J(0, \vec{q})$ s'écrit sous la forme du développement suivant dans le cas de la symétrie cubique [6] :

$$J(0, \vec{q}) = \frac{1}{6} \mathcal{J}^{(2)} q^2 - \frac{1}{120} \mathcal{J}^{(4)} q^4 + \dots$$

où tous les moments $\mathcal{J}^{(n)}$ de l'intégrale d'échange J_{RR} , définis par :

$$\mathcal{J}^{(n)} \equiv \sum_R J_{RR'} |R-R'|^n \quad (I.17)$$

sont de grandeur finie à cause de la courte portée de l'interaction $J_{RR'}$. Plus précisément si le module du vecteur $\vec{q}$ vérifie la condition :

$$q^2 \ll 20 \frac{\mathcal{J}^{(2)}}{\mathcal{J}^{(4)}}$$

la susceptibilité longitudinale χ_q^0 prend la forme :

$$\chi_q^0 \approx \frac{1}{\frac{1}{\chi} + \frac{1}{3} \frac{1}{(g\mu_B)^2} \mathcal{J}^{(2)} q^2}.$$

A présent introduisons la susceptibilité réduite $\hat{\chi}_q^0$ définie par $\hat{\chi}_q^0 \equiv \frac{\chi_q^0}{\chi_\infty}$, où χ_∞ est la susceptibilité de l'ion libre ou encore la susceptibilité χ_q^0 à haute température :

$$\chi_\infty = \frac{(g\mu_B)^2 S(S+1)}{3k_B T} \quad (I.18)$$

La susceptibilité réduite $\hat{\chi}_q^0$ peut alors s'écrire sous la forme :

$$\hat{\chi}_q^0 = \frac{1}{r_1^2 (K_1^2 + q^2)} \quad (I.19)$$

où les paramètres r_1^2 et K_1^2 sont donnés par les relations :

$$r_1^2 = \frac{1}{3} \mathcal{J}^{(2)} \cdot \frac{S(S+1)}{3k_B T} \quad (I.20)$$

$$r_1^2 K_1^2 = \frac{\chi_\infty}{\chi} \quad (I.21)$$

La longueur r_1 mesure la portée de l'interaction d'échange, elle décroît de façon monotone avec la température. Cherchons la signification physique du paramètre K_1 . A haute température, la fonction de corrélation $\langle S_q^0 S_{-q}^0 \rangle$ s'écrit :

$$\langle S_q^0 S_{-q}^0 \rangle \approx \frac{NS(S+1)}{3} \hat{\chi}_q^0.$$

La fonction de corrélation spatiale normalisée $\gamma(\vec{r}) \equiv \frac{\langle S_o^0 S_r^0 \rangle_T}{\frac{1}{3} S(S+1)}$ est alors reliée à la susceptibilité réduite $\hat{\chi}_q^0$ par l'expression :

$$\sum_{\vec{r}} \gamma(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \approx \hat{\chi}_{\vec{q}}^0.$$

Pour des distances entre spins $|\vec{r}|$ grandes $\gamma(\vec{r})$ prend la forme asymptotique suivante :

$$\gamma_{asy.}(\vec{r}) \approx \frac{v}{4\pi r_1^2} \frac{e^{-K_1 r}}{r} \quad \begin{matrix} r \rightarrow \infty \\ T > T_c \end{matrix} \quad (I.22)$$

où v est le volume occupé par un ion magnétique dans le réseau.

L'expression (I.22) est la formule de Ornstein-Zernike obtenue pour la première fois en vue d'expliquer la diffusion de la lumière par les fluctuations de densité d'un fluide pur au voisinage du point critique^[10]. K_1 apparaît comme l'inverse d'une "longueur de corrélation ξ ". Dans l'approximation du champ moléculaire K_1 varie comme $(T-T_c)^{1/2}$ et dans l'approximation de Bogoliubov-Tyablikov comme $(T-T_c)$.

D - VALIDITE DE LA FORMULE DE ORNSTEIN-ZERNIKE

La formule de Ornstein-Zernike découle aussi bien de l'approximation du champ moléculaire que de l'approximation de Bogoliubov-Tyablikov. Sa validité est étroitement dépendante de celle des deux approximations. Or le voisinage de la température de Curie est caractérisé par des fluctuations importantes de $\vec{S}_{\vec{q}}$ qui sont négligées à la fois dans les deux approximations. Bien qu'elle soit justifiée par le critère de la règle de sommes l'approximation de Bogoliubov-Tyablikov n'est donc pas plus valable que celle du champ moléculaire près de la température de Curie. Il ressort de tout ceci que la formule de Ornstein-Zernike ne s'applique pas à proximité de la température de Curie.

Le fait de négliger les fluctuations d'aimantation a comme conséquence de prévoir une variation de la susceptibilité avec la température incorrecte. La susceptibilité obéit à une loi de variation de la forme : $\chi \propto \left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)^{-\gamma}$ au-dessus de la température de Curie. L'exposant critique γ prend une valeur voisine de $4/3$ pour un ferromagnétique du type Heisenberg à 3 dimensions^[11]. C'est cette valeur et non les valeurs prédites par les approximations du champ moléculaire et de Bogoliubov-Tyablikov qui est confirmée par l'expérience.

Fisher et Burford^[12] ont calculé une expression de la susceptibilité réduite $\hat{\chi}_{\vec{q}}^{\infty}$ pour le système d'Ising à 3 dimensions. Les calculs qu'ils ont développé prennent effectivement en compte l'influence des fluctuations de l'aimantation, les seules interactions considérées étant celles d'échange entre premiers voisins. L'expression trouvée qui vérifie la règle de somme :

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \hat{\chi}_{\vec{q}}^{\infty} = 1$$

s'écrit pour q petit devant les dimensions linéaires de la première zone de Brillouin :

$$\hat{\chi}_{\vec{q}}^{\infty} = \left(\frac{1/r_1^2}{K_1^2 + \frac{1}{(1-\frac{1}{2}\eta)} q^2} \right)^{1-\frac{1}{2}\eta} \quad \left\{ \begin{array}{l} T > T_c \\ q \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad (I.23)$$

où :

η est ce qu'on appelle l'exposant de Fisher.

La formule de M.E. Fisher et R. Burford reste applicable, semble-t-il, aux systèmes d'Heisenberg à 3 dimensions, la différence d'avec le modèle d'Ising porte sur la valeur de l'exposant η ^[13]. Dans n'importe lequel des cas cet exposant a une très petite valeur, dans le modèle d'Heisenberg à 3 dimensions elle est égale à 0,075+0,035.

Au voisinage de la température de Curie la variation du paramètre K_1 peut se mettre sous la forme :

$$K_1 \propto \left(\frac{T-T_c}{T_c} \right)^{\nu} \quad (I.24)$$

Dans les approximations du champ moléculaire et de Bogoliubov-Tyablikov où l'exposant η est nul, les valeurs de l'exposant ν sont respectivement 0,5 et 1,0. Les exposants γ , η et ν sont astreints à vérifier la condition générale :

$$\gamma = (2-\eta)\nu \quad (I.25)$$

Cette condition est très facile à établir, il suffit pour cela de se rappeler que si le vecteur $\vec{q}$ s'annule la susceptibilité réduite $\hat{\chi}_{\vec{q}}^{\infty}$ varie au voisinage de la température de Curie T_c comme la susceptibilité ferromagnétique χ .

Si l'expérience ne confirme pas les variations de la susceptibilité χ avec la température qui sont prévues par les approximations du champ moléculaire et de Bogoliubov-Tyablikov, elle ne condamne cependant pas systématiquement l'expression de Ornstein-Zernike (I.19) qui en dérive. Plus précisément un grand nombre de résultats expérimentaux obtenus par diffusion des neutrons s'interprètent en prenant pour expression de la susceptibilité χ_q^0 la formule :

$$\chi_q^0 = \frac{1}{\frac{1}{\chi} + Aq^2} \quad (T > T_c)$$

où l'exposant γ de la susceptibilité χ a la valeur correcte (par exemple égale à ou peu éloignée de $4/3$ pour les ferromagnétiques). Cette validité apparente de la formule de Ornstein-Zernike au voisinage de la température de Curie s'explique par la faible valeur de l'exposant de Fisher η . L'existence de cet exposant ne peut être décelée à moins que des précautions expérimentales particulières ne soient prises.

III - LA RELAXATION

Van Hove^[2] est le premier à avoir exprimé la relaxation des fluctuations critiques d'aimantation sous forme mathématique ; les conclusions auxquelles il aboutit, concernant la situation au-dessus de la température de Curie, ont été retrouvées par De Gennes^[3], Mori et Kawasaki^[5] dans le cadre de l'approximation du champ moléculaire. L'approche du problème par ces différents auteurs est souvent connue sous le nom de "théorie conventionnelle". Les premières expériences de diffusion inélastique des neutrons sur le fer^{[14][15]} ne confirmaient pas les prévisions de cette théorie conventionnelle. Marshall^[16], en remarquant que les expériences avaient été réalisées à des vecteurs de diffusion $\vec{q}$ de grandeur comparable à celle du paramètre K_1 , en déduisit que la théorie conventionnelle ne s'appliquait pas si la condition $q \ll K_1$ n'était pas satisfaite. Il interpréta le désaccord par l'existence d'ondes de spin au-dessus de la température de Curie pour $q > K_1$ ("Remnant spin waves"). Dans le cas où la condition $q \ll K_1$ est satisfaite Kawasaki^[17], par une méthode "self consistente", trouva une relaxation analogue à celle prévue par la théorie conventionnelle mais avec une toute autre dépendance en température. Villain^[18] d'une part et Résibois et De Leener^[19] d'autre part montrèrent que la relaxation devait être différente selon qu'on considérait des vecteurs $\vec{q}$ très petits ou très grands devant la valeur du paramètre K_1 . Dans le cas où la condition $q \gg K_1$ est remplie, les résultats des deux théories concordent pour ce qui est du temps de relaxation bien que les mécanismes proposés pour la relaxation soient différents. Celui envisagé par Résibois et De Leener suggère plutôt l'existence des ondes de spin de W. Marshall. Dans le cas opposé, $q \ll K_1$, la théorie de Villain conduit aux résultats de K. Kawasaki.

Par ailleurs Halperin et Hohenberg^[20], en faisant appel à des propriétés de continuité et d'homogénéité des fonctions $\chi_{\vec{q}}$ et $\Phi_{\vec{q}}(\omega)$, développèrent une théorie phénoménologique de laquelle découlent les résultats essentiels obtenus par les théories microscopiques ou semi-microscopiques déjà citées. Ces résultats théoriques essentiels, un certain nombre d'expériences récentes de diffusion des neutrons^{[21][22][23]}, les ont plus ou moins bien vérifiés.

Après avoir rappelé la théorie conventionnelle qui indique qualitativement les principales caractéristiques de la relaxation des fluctuations d'aimantation au voisinage de la température de Curie, nous examinerons plus en détail

la théorie de Halperin et Hohenberg qui a l'avantage de présenter des hypothèses de départ assez simples. Par comparaison avec les autres théories nous montrerons ses lacunes et ses limites.

A - THEORIE CONVENTIONNELLE

A haute température ($T \gg T_c$) et à basse température ($T \ll T_c$) la méthode des moments utilisée par De Gennes [24], Villain [25] et Marshall [16] permet de prévoir, à vecteur $\vec{q}$ fixe, la variation avec ω des fonctions relaxations $\Phi_{\vec{q}}^0(\omega)$ et $\Phi_{\vec{q}}^{\pm}(\omega)$:

(a) A température nulle les fonctions $\Phi_{\vec{q}}^{\pm}(\omega)$ s'écrivent sous forme de fonctions de Dirac $\delta(\omega \pm \omega_{\vec{q}})$ où le premier moment $\omega_{\vec{q}}$ de la fonction $\Phi_{\vec{q}}^{\pm}(\omega)$ est alors la fréquence de l'onde de spin de vecteur $\vec{q}$. A température non nulle les fonctions $\Phi_{\vec{q}}^{\pm}(\omega)$ restent centrées sur les fréquences $-\omega_{\vec{q}}$ et $+\omega_{\vec{q}}$ mais elles présentent une certaine largeur à mi-hauteur $\Gamma_{\vec{q}}$ due à l'amortissement de l'onde de spin de vecteur $\vec{q}$ (figure 1).

(b) A haute température où il n'existe plus de raison de distinguer entre elles les fonctions $\Phi_{\vec{q}}^0(\omega)$ et $\Phi_{\vec{q}}^{\pm}(\omega)$ nous considérons le comportement de la fonction $\Phi_{\vec{q}}^0(\omega)$. Dans le cas où le vecteur $\vec{q}$ est petit par rapport aux dimensions linéaires de la première zone de Brillouin la fonction $\Phi_{\vec{q}}^0(\omega)$ se présente sous la forme d'une lorentzienne tronquée (figure 1) :

$$\Phi_{\vec{q}}^0(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\Lambda_{\infty}^2 q^2}{\omega^2 + (\Lambda_{\infty}^2 q^2)} & \text{si } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

(i) La fréquence de coupure ω_c est indépendante du vecteur $\vec{q}$ et sa valeur est de l'ordre de un à 10 fois la valeur du rapport $J/\hbar$.

(ii) Λ_{∞} est une constante de diffusion intrinsèque au système et qui est égale approximativement à la quantité $\frac{Jb^2}{\hbar}$, où b est la distance entre premiers voisins magnétiques. Avec les valeurs connues de l'interaction d'échange J dans le fer où le nickel (pour le fer $J \approx 8,5$ MeV) la fréquence de coupure ω_c est suffisamment grande (notamment devant la largeur à mi-hauteur $(\Lambda_{\infty}^2 q^2)$) pour que nous puissions considérer qu'il n'y a pas de troncature de la lorentzienne. Cela explique la présence du facteur $1/\pi$ dans la formule (I.20) qui en toute rigueur n'est pas un facteur de normalisation correct pour une lorentzienne tronquée. Ainsi pour des temps t plus long que le temps microscopique $\tau_0 \approx \hbar/J$,

la relaxation est exponentielle :

$$\varphi_{\vec{q}}^0(t) \approx e^{-t/\tau_{\vec{q}}} \quad . \quad (I.27)$$

Dans cette expression le temps de relaxation $\tau_{\vec{q}}$, égal à la quantité $(\Lambda_{\infty} q^2)^{-1}$, devient infini si le vecteur $\vec{q}$ s'annule. C'est une propriété qu'on retrouve à toute température et qui est liée au "freinage cinématique" (kinematic slowing-down) que De Gennes et Villain [26] mirent en évidence. Ce phénomène provient de ce que dans un système ferromagnétique isotrope l'aimantation totale est une constante du mouvement. En termes plus précis le freinage cinématique s'exprime par la relation :

$$\lim_{\vec{q} \rightarrow 0} \varphi_{\vec{q}}^0(t) = \varphi_{\vec{q}=0}^0(0) \quad .$$

Selon Mori et Kawasaki [5] la relaxation reste exponentielle juste au-dessus de la température de Curie T_c pourvu que la fonction $-\ddot{\varphi}_{\vec{q}}^0(t)$ décroisse beaucoup plus vite que la fonction $\varphi_{\vec{q}}^0(t)$:

(a') Si la fonction $-\ddot{\varphi}_{\vec{q}}^0(t)$ qu'on appelle la fonction relaxation des "vitesses" car on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$-\ddot{\varphi}_{\vec{q}}^0(t) = \frac{(\dot{S}_{\vec{q}}^0(t), \dot{S}_{\vec{q}}^{0*})}{(S_{\vec{q}}^0, S_{\vec{q}}^{0*})} = \frac{N}{(g\mu_B)^2} \frac{1}{\chi_{\vec{q}}^0} (\dot{S}_{\vec{q}}^0(t), \dot{S}_{\vec{q}}^{0*})$$

s'annule au bout d'un temps très court comparable à τ_0 , la fonction relaxation $\varphi_{\vec{q}}^0(t)$ s'écrit alors pour t supérieur à τ_0 :

$$\varphi_{\vec{q}}^0(t) \approx 1 - \frac{t}{\tau_{\vec{q}}}$$

où pour le temps de relaxation $\tau_{\vec{q}}$ nous avons :

$$\frac{1}{\tau_{\vec{q}}} \approx - \int_0^{\infty} \ddot{\varphi}_{\vec{q}}^0(t') dt' = \frac{N}{(g\mu_B)^2} \frac{1}{\chi_{\vec{q}}^0} \int_0^{\infty} dt' (\dot{S}_{\vec{q}}^0(t'), \dot{S}_{\vec{q}}^{0*}) \quad . \quad (I.28)$$

(b') Dans la mesure où nous considérons un temps t très inférieur à $\tau_{\vec{q}}$ la variation de la fonction $\varphi_{\vec{q}}^0(t)$ avec le temps t est donc donnée en première approximation par la loi exponentielle (I.26).

Remarquons que dans le cas des systèmes ferromagnétiques isotropes l'existence du freinage cinématique fait que la condition :

$$\tau_0 < t \ll \tau_q$$

est toujours satisfaite pour les petits vecteurs $\vec{q}$. On peut montrer par un calcul direct sur la formule (I.28) que le temps de relaxation τ_q devient bien infini quand le vecteur $\vec{q}$ s'annule.

En prenant pour la susceptibilité χ_q^0 l'expression de Ornstein-Zernike (I.19) on obtient pour le temps de relaxation l'expression :

$$\frac{1}{\tau_q} \approx A r_1^2 \Lambda_\infty q^2 (K_1^2 + q^2) .$$

A est un paramètre traduisant la variation supposée de la fonction relaxation des "vitesses" avec la température dont la valeur passe de 5,0 à 1,0 environ quand la température croît de la température de Curie à la température infinie. Distinguons les deux cas extrêmes :

(i') $q^2 \ll K_1^2$. Dans ce cas nous mettons en évidence une constante de diffusion Λ qui s'écrit compte tenu de la relation (I.27) entre les susceptibilités χ_∞ et χ d'une part et le produit $r_1^2 K_1^2$ d'autre part :

$$\Lambda \approx \Lambda_\infty A \frac{\chi_\infty}{\chi} . \quad (I.29)$$

Ainsi la constante de diffusion s'annule-t-elle à la température de Curie comme l'inverse de la susceptibilité χ ("critical slowing-down"). C'est le résultat initialement obtenu par Van Hove [2].

(ii') $q^2 \gg K_1^2$. Ce cas correspond à la situation existante à la température de Curie. Le temps de relaxation varie alors suivant le vecteur $\vec{q}$ comme la quantité q^{-4} . Selon la théorie conventionnelle la fonction relaxation $\Phi_q^0(\omega)$ se présente toujours sous forme d'une lorentzienne au-dessus de la température de Curie.

B - THEORIE DES "LOIS D'ECHELLE" : IDEES DIRECTRICES

L'idée de base de la théorie des "lois d'échelle" est que pour décrire les phénomènes macroscopiques qui caractérisent le système au voisinage de sa température de Curie, point n'est besoin de connaître en détail les mécanismes microscopiques qui le régissent. L'hypothèse essentielle de la théorie des lois d'échelle proposée par Halperin et Hohenberg^[20] repose sur l'existence à toute température d'une longueur de cohérence ξ unique. Cette longueur est approximativement la distance de deux spins au-delà de laquelle les fluctuations de ceux-ci ne sont plus corrélées. La longueur de cohérence ξ dépend en conséquence de la température : Elle devient infinie à la température de Curie et décroît continuellement quand on s'écarte de cette dernière. Considérons dans le système une sphère de rayon égal à ξ , on peut raisonnablement penser que la température n'a que peu d'influence sur la corrélation des fluctuations de deux spins situés dans la partie centrale de la sphère en question, dans la mesure où la distance r qui les sépare est petite devant la longueur ξ . Sur cet exemple nous sentons qu'il doit exister une analogie quand la condition $r \ll \xi$ est satisfaite, entre les corrélations des fluctuations de deux spins à température éloignée et à température proche de la température de Curie. La seule différence réside en ce que dans le premier cas la distance de séparation r est de l'ordre des distances interatomiques alors que dans le second elle peut être d'un ordre de grandeur bien plus grand. L'étude de la situation dans les deux cas serait en quelque sorte la même, mise à part la question d'échelle. Ces quelques considérations sont à la base des hypothèses de toute théorie dite de "lois d'échelle statiques". Nous pouvons développer un type de raisonnement analogue pour ce qui est des corrélations temporelles des fluctuations de spins ; il permet alors d'établir des hypothèses de "lois d'échelle dynamiques".

Définissons la fonction de corrélation symétrique $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$ par la relation :

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega) \equiv \frac{(g\mu_B)^2}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-i\omega t} \langle \{\vec{S}_{-\vec{q}}, \vec{S}_{\vec{q}}(t)\} \rangle .$$

Cette notation rappelle que la fonction de corrélation symétrique est relative à un système ferromagnétique où le paramètre d'ordre est l'aimantation totale $\vec{M}$.

L'anti commutateur $\{A, B\}$ de deux opérateurs A et B est défini comme suit :

$$\{A, B\} \equiv \frac{1}{2} (AB + BA) .$$

Introduisons la fonction de corrélation statique $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ définie par la relation :

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega) . \quad (I.30)$$

Halperin et Hohenberg écrivent encore la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$ sous la forme^[20]:

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega) \equiv 2\pi \frac{1}{\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})} C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) F_{\vec{q}, \xi}^{\vec{M}} \left(\frac{\omega}{\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})} \right) . \quad (I.31)$$

A partir de la définition (I.30) de la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ on se rend aisément compte que la fonction $F_{\vec{q}, \xi}^{\vec{M}}(x)$ est normalisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{\vec{q}, \xi}^{\vec{M}}(x) dx = 1 \quad (I.32)$$

$\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ est la fréquence caractéristique de la fonction $F_{\vec{q}, \xi}^{\vec{M}}$, elle est définie par l'intégrale :

$$\int_{-1}^{+1} F_{\vec{q}, \xi}^{\vec{M}}(x) dx \equiv \frac{1}{2} . \quad (I.33)$$

La variable réduite d'intégration x est évidemment égale au rapport $\omega/\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$. Une façon de traduire ce qu'on a avancé au début du paragraphe est de supposer avec Halperin et Hohenberg que les fonctions $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ et $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$ conservent chacune une expression mathématique déterminée le long de toute droite passant par l'origine du $1/2$ plan (q, ξ^{-1}) de la figure 2. Cette hypothèse fondamentale impose des conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$, $F_{\vec{q}, \xi}^{\vec{M}}(x)$ et la fréquence caractéristique $\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$:

(a) La condition relative à la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ constitue l'hypothèse des "lois d'échelle statiques".

(b) Les conditions relatives à la fréquence $\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ et à la fonction $F_{\vec{q}, \xi}^{\vec{M}}$ constituent les hypothèses des "lois d'échelle dynamiques".

L'hypothèse des lois d'échelle statiques stipule que la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$

est une fonction homogène des variables q et ξ^{-1} :

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(q) = q^u G(q\xi) \quad . \quad (I.34)$$

La fonction $G(q\xi)$ est partout définie dans le $1/2$ plan (q, ξ^{-1}) . Les hypothèses des lois d'échelle dynamiques s'énoncent sous forme de deux conditions :

(i) la fréquence caractéristique $\omega_{\xi}^{\vec{M}}(q)$ est une fonction homogène des variables q et ξ^{-1} :

$$\omega_{\xi}^{\vec{M}}(q) = q^z \Omega(q\xi) \quad . \quad (I.35)$$

La fonction $\Omega(q\xi)$ est partout définie dans le $1/2$ plan (q, ξ^{-1}) .

(ii) La fonction $F_{q, \xi}^{\vec{M}}$ ne dépend des variables q et ξ^{-1} qu'à travers le produit $q\xi$:

$$F_{q, \xi}^{\vec{M}}(x) = F_{q\xi}^{\vec{M}}(x) \quad . \quad (I.36)$$

Divisons le $1/2$ plan (q, ξ^{-1}) en trois régions (cf. la figure 2) : Les régions (I) et (III) dans lesquelles la condition $q\xi \ll 1$ est satisfaite sont connues respectivement sous les noms de région "hydrodynamique inférieure" ($T < T_c$) et de région "hydrodynamique supérieure" ($T > T_c$). La région (II) définie par la condition $q\xi \gg 1$ est appelée région "critique". On doit s'attendre à ce que dans ces trois régions les fonctions $C_{\xi}^{\vec{M}}(q)$ et $C_{\xi}^{\vec{M}}(q, \omega)$ aient des comportements asymptotiques différents. Les hypothèses des lois d'échelle permettent à partir d'une situation connue loin de la température de Curie de prévoir et l'état et l'évolution du système au voisinage de celle-ci : Par exemple sachant que les fluctuations transversales de l'aimantation de petits vecteurs d'onde $\vec{q}$ caractérisent le comportement du système à très basse température ($T \ll T_c$), leur prédominance s'étendra à toute la région (I). L'existence des ondes de spins aux températures proches de la température de Curie T_c a été suggérée par plusieurs auteurs dont Halperin et Hohenberg^[27] et a été mise en évidence par un certain nombre d'expériences récentes de diffusion des neutrons^[21].

C - APPLICATION DES HYPOTHESES DES LOIS D'ECHELLE

La fonction de corrélation symétrique $C_{\xi}^{\vec{M}}(q, \omega)$ s'écrit sous la forme générale suivante :

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega) = \frac{\hbar \omega}{2} \frac{e^{\beta \hbar \omega} + 1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \left[\chi_{\vec{q}}^0 \Phi_{\vec{q}}^0(\omega) + \frac{1}{2} \chi_{\vec{q}}^+ (\Phi_{\vec{q}}^+(\omega) + \Phi_{\vec{q}}^-(\omega)) \right] \quad (I.37)$$

Dans la mesure où la condition $\beta \hbar \omega \ll 1$ est satisfaite la fonction de corrélation statique $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ s'écrit :

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) \approx \frac{k_B T}{2\pi} (\chi_{\vec{q}}^0 + \chi_{\vec{q}}^+) \quad (I.38)$$

Région (I) : A très basse température ($T \ll T_c$) et dans le cas limite où le vecteur $\vec{q}$ est très petit, l'approximation des ondes de spin montre que les susceptibilités $\chi_{\vec{q}}^0$ et $\chi_{\vec{q}}^+$ varient respectivement en q^{-1} et q^{-2} dans la mesure pour ce qui est de la susceptibilité longitudinale où l'énergie de l'onde de spin de vecteur d'onde $\vec{q}$ reste très petite devant le terme $k_B T$ [5]. On pourrait penser qu'à très basse température la condition $\beta \hbar \omega \ll 1$ devienne caduque. En fait la condition $Dq^2 \ll k_B T$ (où D est la constante des ondes de spin) nécessaire pour qu'on puisse négliger dans les expressions (I.37) et (I.38) la susceptibilité longitudinale $\chi_{\vec{q}}^0$ est à peu près équivalente à la condition $\beta \hbar \omega \ll 1$ compte tenu de ce que la fréquence des ondes de spin de vecteur $\vec{q}$ est bien définie à basse température. Moyennant cette remarque qui a son importance à très basse température et pour un vecteur $\vec{q}$ petit les expressions des fonctions $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ et $F_{q\xi}^{\vec{M}}$ sont :

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) \approx \frac{k_B T}{2\pi} \chi_{\vec{q}}^+ \sim q^{-2} \quad (I.39)$$

$$\frac{1}{\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})} F_{q\xi}^{\vec{M}} \left(\frac{\omega}{\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})} \right) \approx \frac{1}{2} (\Phi_{\vec{q}}^+(\omega) + \Phi_{\vec{q}}^-(\omega)) \quad \left\{ \begin{array}{l} T \ll T_c \\ q \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (I.40)$$

On montre facilement à l'aide de la condition (I.34) dérivant de l'hypothèse des lois d'échelles statiques que la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ s'écrit dans la région (I) sous la forme :

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) \propto \xi^{-(2+u)} q^{-2}.$$

A température petite mais non nulle on écrit avec une bonne approximation les fonctions relaxation sous la forme :

$$\Phi_{\vec{q}}^{\pm}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{\vec{q}}}{(\omega \pm \omega_{\vec{q}})^2 + \Gamma_{\vec{q}}^2} \quad \left(\begin{array}{l} T \ll T_c \\ q \rightarrow 0 \end{array} \right) \quad (I.41)$$

où : (i) $\Gamma_{\vec{q}}$ est le terme qui traduit l'amortissement de l'onde de spin de vecteur d'onde $\vec{q}$.

(ii) $\omega_{\vec{q}}$ premier moment de la fonction $\Phi_{\vec{q}}^{\rightarrow}(\omega)$ est la fréquence de l'onde de spin de vecteur $\vec{q}$.

Si le terme $\Gamma_{\vec{q}}$ tend vers zéro on retrouve bien les fonctions delta $\delta(\omega \pm \omega_{\vec{q}})$ dont nous avons parlé dans la théorie conventionnelle (méthode des moments). Selon l'hypothèse fondamentale de la théorie des lois d'échelle la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$ présente donc dans la région (I) toujours deux maximums bien séparés et dont les positions correspondent aux fréquences $\pm \omega_{\vec{q}}$ (cf. figure (3)). La condition $\Gamma_{\vec{q}}/\omega_{\vec{q}} \ll 1$ étant implicitement satisfaite dans la région (I) la fréquence caractéristique $\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ est égale à la fréquence $\omega_{\vec{q}}$ de l'onde de spin :

$$\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) = Dq^2$$

A présent D est une certaine fonction de la température donc de la longueur de cohérence ξ . La première des conditions (I.35) découlant des hypothèses des lois d'échelle dynamiques impose pour la constante D des ondes de spin la loi de variation suivante :

$$D \propto \xi^{2-z}$$

Région(III): Au-dessus de la température de Curie les expressions (I.37) et (I.38) se simplifient notablement et les fonctions $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ et $F_{\xi}^{\vec{M}}\left(\frac{\omega}{\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})}\right)$ s'écrivent :

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) = \frac{3k_B T}{2\pi} \chi_{\vec{q}}^0 \quad (I.42)$$

(T > T_c)

$$\frac{1}{\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})} F_{\vec{q}\xi}^{\vec{M}}\left(\frac{\omega}{\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})}\right) = \Phi_{\vec{q}}^0(\omega) \quad (I.43)$$

En particulier nous savons qu'à très haute température (T >> T_c) et à la limite des petits vecteurs $\vec{q}$ la fonction relaxation est une lorentzienne ; en conséquence dans la région (III) la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$ est aussi une lorentzienne (cf.fig.3) et par conséquent dans cette région (I.43) s'écrit par analogie avec l'expression de $\Phi_{\vec{q}}^0(\omega)$ à haute température (I.26) :

$$\frac{1}{\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})} F_{q\xi}^{\vec{M}} \left(\frac{\omega}{\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\Lambda q^2}{\omega^2 + (\Lambda q^2)^2} \quad (I.44)$$

Dans l'expression ci-dessus Λ qui n'est plus égale à Λ_0 , a une certaine variation avec la température donc avec ξ qu'on déduit de la condition (I.35) des hypothèses des lois d'échelle dynamique. Il est facile de montrer que la fréquence caractéristique est alors égale à la 1/2 largeur à mi-hauteur de la lorentzienne (I.44) :

$$\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) = \Lambda q^2.$$

La loi de variation de la constante de diffusion Λ dans la région (III) est donnée par :

$$\Lambda \propto \xi^{2-z}.$$

On remarque immédiatement que c'est la même loi de variation que celle de la constante des ondes de spin D dans la région (I). C'est un résultat remarquable qui se déduit très simplement des hypothèses des lois d'échelle dynamiques.

Région (II) : D'après les hypothèses des lois d'échelle statiques et dynamiques les fonctions $G(q\xi)$ et $\Omega(q\xi)$ sont partout définies dans le 1/2 plan (q, ξ^{-1}) , aussi les valeurs que prennent ces fonctions quand la longueur de cohérence ξ devient infinie, c'est-à-dire à la température de Curie, sont-elles finies. La fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ pour une température légèrement supérieure à T_c est proportionnelle à la susceptibilité réduite $\hat{\chi}_{\vec{q}}^0$ (d'après la relation (I.42)), qui elle-même obéit à la loi de variation suivante avec le vecteur $\vec{q}$:

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) \propto \hat{\chi}_{\vec{q}}^0 \propto q^{-2+\eta} \quad \begin{matrix} T \gtrsim T_c \\ (q\xi) \rightarrow \infty \end{matrix}$$

Cette expression qui bien qu'elle se déduise de l'expression de Fisher et Burford, peut indépendamment de celle-ci constituer une définition de l'exposant de Fisher η .

La condition (I.28) permet de relier de suite l'exposant u à l'exposant de Fisher η :

$$u = -2 + \eta.$$

La fréquence caractéristique $\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ s'écrit simplement :

$$\vec{\omega}_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) \propto q^z .$$

Récapitulons les principaux résultats auxquelles conduisent les hypothèses des lois d'échelle de Halperin et Hohenberg en prenant le soin de tout exprimer en fonction des exposants η et z :

- Tableau I -

	Région (I)	Région (II)	Région (III)
$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) \propto$	$\xi^{-\eta} q^{-2}$	$q^{-2+\eta}$	
$\vec{\omega}_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) \propto$	$\xi^{2-z} q^2$	q^z	$\xi^{2-z} q^2$

De ce tableau on tire les deux remarques suivantes :

a) Un seul exposant, celui de Fisher η caractérise les expressions de la fonction de corrélation statique $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ dans les régions (I) et (II). D'une façon générale au-dessus du point de Curie la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ est rigoureusement proportionnelle à la susceptibilité réduite $\hat{\chi}_q^{\infty}$; Fisher et Burford en ont donné une expression dans le modèle d'Ising (cf. la relation (I.23)) que nous n'avons pas jugé utile de faire figurer dans le tableau ci-dessus.

b) Un seul exposant, l'exposant z , caractérise les expressions de la fréquence caractéristique $\vec{\omega}_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ dans les trois régions asymptotiques (I), (II) et (III).

A priori nous n'avons aucune connaissance sur la valeur de l'exposant z , ce qui n'est pas le cas de l'exposant de Fisher η qu'on a calculé dans différents modèles. Il nous faut donc trouver à présent une relation entre z et η (ou ce qui revient au même entre la fréquence caractéristique $\vec{\omega}_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ et la fonction de corrélation statique $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$) sous peine que les hypothèses des lois d'échelle ne conduisent seulement à des résultats qui bien qu'intéressants (comme celui concernant les variations avec ξ des constantes des ondes de spin D et de diffusion Λ) n'en restent pas moins qualitatifs. Notre recherche nous

est facilitée par deux propriétés générales, l'une (i) reliant premier moment $\omega_{\vec{q}}$ et susceptibilité $\chi_{\vec{q}}$, l'autre (ii) relative à la signification physique de la longueur de cohérence ξ . (i) Dans le cas où l'hamiltonien du système est l'hamiltonien d'Heisenberg (I.5) il existe une relation générale (valable dans toute la phase ordonnée ferromagnétique correspondant à $T < T_c$) entre le premier moment $\omega_{\vec{q}}$ de la fonction relaxation $\Phi_{\vec{q}}(\omega)$ et la susceptibilité transversale $\chi_{\vec{q}}^+$: [5]

$$\omega_{\vec{q}} \propto \frac{|\langle \vec{M} \rangle|}{\chi_{\vec{q}}^+}.$$

Dans la région (I) le premier moment $\omega_{\vec{q}}$ s'identifie à la fréquence caractéristique $\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ et la susceptibilité transversale $\chi_{\vec{q}}^+$ à la fonction de corrélation $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ selon la théorie des lois d'échelle de Halperin et Hohenberg. Le résultat de cette double identification est une autre loi de variation de la fréquence caractéristique dans la région (I) :

$$\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) \propto |\langle \vec{M} \rangle| \xi^{\eta} q^2 \quad \left(\begin{array}{l} T < T_c \\ q\xi \ll 1 \end{array} \right)$$

En comparant cette relation avec celle déduite de l'application des hypothèses des lois d'échelle dynamique dans la région (I) (cf. l'expression correspondante de $\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ dans le tableau I) nous obtenons une première loi de variation de la valeur moyenne de l'aimantation avec ξ :

$$|\langle \vec{M} \rangle| \propto \xi^{2-\alpha-\eta} \quad (I.45)$$

(ii) La fonction de corrélation statique $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$, compte tenu de sa définition (I.24) et de celle de la fonction de corrélation dynamique $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$, s'écrit encore :

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}) = \frac{(g\mu_B)^2}{N} \langle \{\vec{S}_{-\vec{q}}, \vec{S}_{\vec{q}}\} \rangle.$$

La fonction de corrélation spatiale $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{r})$ de deux spins séparés par une distance $|\vec{r}|$ est la transformée de Fourier de la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$. Selon la définition de la longueur de cohérence ξ que nous avons donné au début du paragraphe précédent, la fonction de corrélation spatiale $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{r})$ devient proportionnelle au produit des valeurs moyennes des deux spins considérés si la distance r qui les sépare est supérieure à ξ . Plus exactement on peut écrire :

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{r}) \approx (g\mu_B)^2 \langle \vec{S}_0 \rangle \langle \vec{S}_r \rangle \quad r > \xi$$

Dans le cas où la température est inférieure à la température de Curie, il apparait donc que la fonction de corrélation spatiale est proportionnelle au carré de la valeur moyenne de l'aimantation totale si la distance de séparation des deux spins est supérieure à la longueur de cohérence. Par ailleurs si la température n'est que très légèrement inférieure à la température de Curie nous pouvons supposer selon les suggestions de Josephson et Villain* que la variation de la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{r})$ diffère assez peu pour une distance r inférieure à ξ de celle à la température de Curie. De l'expression de $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ dans la région (II) (cf. le tableau I) on déduit facilement l'expression asymptotique suivante de la fonction de corrélation $C_{\infty}^{\vec{M}}(\vec{r})$:

$$C_{\xi=\infty}^{\vec{M}}(r) \propto r^{-(1+\eta)} \quad . \quad (r \rightarrow \infty)$$

En résumé la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{r})$ dans le cas où la température est légèrement inférieure à la température de Curie, prend les formes approchées suivantes :

$$C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{r}) \propto \begin{cases} r^{-(1+\eta)} & \text{si } r < \xi \\ |\langle \vec{M} \rangle|^2 & \text{si } r > \xi \end{cases} \quad (T \lesssim T_c)$$

Au voisinage de la température de Curie où la longueur de cohérence devient justement infinie la condition $r < \xi$ n'est pas incompatible avec le fait de supposer r grand.

La continuité de la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{r})$ impose une seconde loi de variation de la valeur moyenne de l'aimantation avec ξ :

$$|\langle \vec{M} \rangle|^2 \propto \xi^{-(1+\eta)} \quad . \quad (I.46)$$

Des deux lois de variation (I.45) et (I.46) on tire immédiatement une relation entre les exposants z et η :

$$z = \frac{5-\eta}{2} \quad .$$

Nous pouvons exprimer à présent les variations de la fréquence caractéristique $\omega_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ dans les régions asymptotiques à l'aide de l'exposant de Fisher η :

* Nous n'avons pas de références à présenter, les suggestions en question n'ont été, à notre connaissance, présentées qu'oralement.

(a) Dans les régions (I) et (III) nous avons pour la constante des ondes de spin D et la constante de diffusion Λ la loi de variation commune avec ξ suivante :

$$\left. \begin{matrix} D \\ \Lambda \end{matrix} \right\} \propto \xi^{-(1-\eta)/2} .$$

(b) Dans la région (II) la fréquence caractéristique présente la variation suivante :

$$\vec{\omega}_{\xi=\infty}^{\vec{M}}(\vec{q}) \propto q^{\frac{5-\eta}{2}} .$$

Au-dessus de la température de Curie on peut tout naturellement identifier la longueur de cohérence ξ à l'inverse du paramètre K_1 ; la loi de variation de la constante de diffusion Λ s'écrit alors sous une forme plus fréquemment utilisée :

$$\Lambda \propto K_1^{\frac{1-\eta}{2}} .$$

Dans le cadre de la théorie des lois d'échelle de Halperin et Hohenberg les propriétés statiques et dynamiques du système à température de Curie et dans la région hydrodynamique supérieure se déduisent dans une large mesure des propriétés en-dessous de la température et en particulier dans la région des ondes de spins.

Dégageons les différences essentielles entre les résultats des théories conventionnelle et des lois d'échelle au-dessus de la température de Curie :

(a) Dans la région hydrodynamique (III) les deux théories prévoient bien pour la fonction relaxation $\Phi_{\vec{q}}^0(\omega)$ une forme lorentzienne et l'existence d'une constante de diffusion Λ mais la variation de celle-ci avec la température n'est pas la même dans les deux théories. Plus précisément les variations de la constante de diffusion Λ avec la susceptibilité χ sont les suivantes selon les deux théories :

$$\Lambda \propto \begin{cases} \chi^{-1} & \text{(Théorie conventionnelle)} \\ \chi^{-1/4} & \text{(Théorie des lois d'échelle et compte tenu de la faible valeur de l'exposant } \eta) \end{cases}$$

(b) Dans la région critique (II) la fonction relaxation $\Phi_q^0(\omega)$ conserve selon la théorie conventionnelle une forme lorentzienne et par conséquent la fréquence caractéristique qu'on peut identifier à l'inverse du temps de relaxation τ_q est alors proportionnelle au terme q^4 . Ce résultat diffère notablement de celui obtenu par la théorie des lois d'échelle. Les variations de la fréquence caractéristique sont donc les suivantes selon les deux théories :

$$\omega_{\xi=\infty}^{\vec{M}}(\vec{q}) \propto \begin{cases} q^4 & \text{(Théorie conventionnelle)} \\ q^{5/2} & \text{(Théorie des lois d'échelle et compte tenu de la faible valeur de l'exposant } \eta \text{)} \end{cases}$$

D - LIMITES DE LA THEORIE DES LOIS D'ECHELLE ET THEORIES MICROSCOPIQUES

Il n'est pas facile de justifier l'hypothèse de départ de la théorie de Halperin et Hohenberg. Cependant cette théorie conduit sans calculs compliqués à un certain nombre des résultats obtenus par les théories de Villain, Kawasaki et Résibois et De Leener qui sont fondées sur diverses descriptions microscopiques des phénomènes de fluctuations de l'aimantation du système. La raison profonde de cette concordance dans les résultats ne nous apparaît pas encore très clairement.

Les théories microscopiques des auteurs que nous venons de citer ont en commun un certain nombre d'approximations qui sont entre autres :

- (i) celle de Ornstein-Zernike où l'exposant de Fisher η est nul,
- (ii) celle dite des "phases aléatoires" (R.P.A.) qui autorise, entre autre, à décomposer les fonctions de corrélation de quatre spins en produit de deux fonctions de corrélation de deux spins.

Par utilisation des deux approximations ci-dessus Kawasaki mit en évidence une contradiction grave de la théorie conventionnelle.

La théorie conventionnelle donne pour la constante de diffusion Λ l'expression générale suivante :

$$\Lambda = \frac{L}{\chi}$$

L (coefficient "cinétique" d'Onsager) est une fonction de la température ne présentant aucune anomalie particulière à la température de Curie ; selon la relation (I.29) nous pourrions l'identifier à la quantité $\Lambda_{\infty} A \chi_{\infty}$. Cette théorie prévoit donc que l'anomalie à la température de Curie de la constante de diffusion doit être attribuée essentiellement à la divergence de la susceptibilité χ . En fait si on tient compte des expressions (I.29) et (I.28) de la constante de diffusion Λ et du temps de relaxation τ_q , on montre que dans le cas d'un système ferromagnétique isotrope où l'hamiltonien est celui d'Heisenberg, le calcul du coefficient L conduit à ce que ce dernier devienne infini à la température de Curie comme l'inverse de la puissance cubique du paramètre K_1 :

$$L \propto K_1^{-3} \quad (T \rightarrow T_{c+})$$

La théorie conventionnelle apparaît donc comme formellement incorrecte. Plusieurs auteurs ont proposé des solutions pour lever la contradiction de cette théorie. Dans le cas du système ferromagnétique isotrope où l'hamiltonien est celui d'Heisenberg, une méthode "self-consistante" qu'a développé Kawasaki^[17] permet de montrer que la constante de diffusion Λ est effectivement proportionnelle à l'inverse de la racine quatrième de la susceptibilité comme le prévoit la théorie des lois d'échelle. A la température de Curie cette méthode suggère l'existence d'un temps caractéristique de la fonction relaxation $\phi_q^0(t)$ proportionnel au terme $q^{-5/2}$ [28], ce qui est aussi le résultat de la théorie des lois d'échelle (cf. l'appendice). Les deux résultats

obtenus par la méthode de Kawasaki ont été trouvés à partir de la théorie de Résibois et De Leener^[19] et de la théorie semi-macroscopique de Villain^[18]. Récemment, Villain a proposé une méthode basée sur "l'approximation mode-mode" de Kadenoff et Swift^[30] qui permet de retrouver aisément les résultats précédents.

Bien que la théorie simple des lois d'échelle confirme certaines prévisions des théories microscopiques, elle est impuissante à prévoir la forme analytique des fonctions relaxation dans les régions du $1/2$ plan (q, ξ^{-1}) autres que les régions (I) et (III). En effet cette théorie ne contient aucun calcul d'expression analytique des fonctions de corrélations $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q})$ et $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$, elle affirme seulement que dans certaines régions (par exemple les régions (I) et (III)) où les expressions des fonctions de corrélations précédentes sont connues loin de la température de Curie, lesdites expressions sont conservées à proximité de celle-ci*.

* En particulier la théorie des lois d'échelle est impuissante à prévoir une forme déterminée de la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$ dans la région critique (II).

De plus la théorie des lois d'échelle ne permet de connaître que des expressions asymptotiques de la fonction $\Omega(q\xi)$ (cf. la relation (I.35)) dans les régions (I), (II) et (III). On mesure ainsi les limites de la théorie des lois d'échelle. En fait le calcul des fonctions $\Phi_q^0(\omega)$ et $\Omega(q\xi)$ nécessite une certaine connaissance du détail des mécanismes régissant la relaxation des fluctuations d'aimantation, connaissance dont on se soucie guère dans la théorie des lois d'échelle.

Très récemment Résibois et Piette ont calculé dans le cadre de l'approximation de Ornstein-Zernike une expression de la fonction $\Omega(q\xi)$ valable dans toute la partie du $1/2$ plan (q, ξ^{-1}) où la température est supérieure à la température de Curie^[31]. Ce calcul a été effectué à partir de la théorie de l'équation cinétique de Résibois et De Leener^[19]. En réalité la fonction d'échelle calculée par Résibois et Piette est la fonction suivante :

$$\bar{f}(x) = \Omega\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $x \equiv \frac{1}{q\xi} = \frac{K_1}{q}$ pour $T > T_c$.

Le résultat du calcul de Résibois et Piette présente la fonction d'échelle $\bar{f}(x)$ sous la forme implicite suivante :

$$\bar{f}(x) = 2\pi(1+x^2) \int_0^\infty dy \int_{-1}^{+1} d\alpha \frac{y^2(1+2y\alpha)}{(x^2+y^2)^{5/4} [(1+y^2+2y\alpha)^{5/4} \bar{f}\left(\frac{x}{(1+y^2+2y\alpha)^{1/2}}\right) + y^{5/2} \bar{f}\left(\frac{x}{y}\right)]}$$

(I.47)

L'équation intégrale (I.47) a été résolue numériquement par un procédé d'itération. Dans le tableau II figurent les valeurs numériques de la fonction normalisée ($f(x) = \bar{f}(x)/\bar{f}(0)$) calculée pour un certain nombre de valeurs de la variable x . En figure (4) nous avons tracé la variation de cette fonction d'échelle (en trait continu). Nous remarquons l'existence d'un minimum dans la variation de cette fonction pour une valeur de la variable x très voisine de l'unité ($x \approx 1,05$).

Dans la région hydrodynamique (III) où la fréquence caractéristique $\vec{\omega}_\xi^M(\vec{q})$ est donnée alors par la relation : $\vec{\omega}_\xi^M(\vec{q}) \propto q^2 \sqrt{K_1}$ la fonction d'échelle $f(x)$ doit avoir l'expression asymptotique suivante :

TABLEAU II

Valeurs numériques de la fonction d'échelle $f(K_1/q)$ calculée par Résibois et Piette (valeurs communiquées par les auteurs).

$x \equiv K_1/q$	$f(x) \equiv \frac{\bar{f}(x)}{\bar{f}(0)}$
0,00	1,000
0,05	0,945
0,10	0,905
0,15	0,845
0,20	0,807
0,25	0,769
0,30	0,741
0,35	0,714
0,40	0,688
0,45	0,672
0,50	0,654
0,55	0,640
0,60	0,625
0,65	0,615
0,70	0,608
0,75	0,601
0,80	0,597
0,85	0,595
0,90	0,591
0,95	0,588

$x \equiv K_1/q$	$f(x) \equiv \frac{\bar{f}(x)}{\bar{f}(0)}$
1,00	0,587
1,052	0,587
1,111	0,587
1,176	0,590
1,25	0,592
1,333	0,597
1,428	0,601
1,546	0,608
1,666	0,622
1,818	0,632
2,0	0,647
2,222	0,674
2,5	0,702
2,857	0,741
3,333	0,790
4,0	0,855
5,0	0,951
6,666	1,095
10,0	1,337
20,0	1,895

$$f(x) \propto \sqrt{x} \quad \text{pour} \quad x \gg 1$$

qui est l'équation d'une parabole. Résibois et Piette ont montré à partir de la relation (I.47) qu'il en est bien ainsi. En figure (4) nous avons donc aussi tracé la variation de cette expression asymptotique (en trait discontinu).

Pour les valeurs de variable x supérieures à 4 la fonction $f(x)$ se confond pratiquement avec son expression asymptotique. Ainsi le calcul de Résibois et Piette présente-t-il l'intérêt de déterminer une frontière relativement précise à la région hydrodynamique (III).

Dans la région critique (II) les théories de Villain^[18], Résibois et De Leener^[19] prévoient des formes différentes de la fonction relaxation $\Phi_{\vec{q}}^0(\omega)$. Selon la théorie semi-macroscopique de Villain la relaxation à température de Curie à la limite des petits vecteurs $\vec{q}$ ne devient exponentielle qu'au bout d'un temps comparable au temps de relaxation et qui est comme lui proportionnel au terme $q^{-5/2}$. A la différence de la théorie conventionnelle la fonction $\Phi_{\vec{q}}^0(\omega)$ dans la théorie de Villain ne serait lorentzienne que dans un domaine étroit autour de la fréquence centrale $\omega = 0$. Les "ailes" non lorentziennes de la fonction relaxation sont décrites par une expression mathématique compliquée. La théorie de Résibois et De Leener ne prédit jamais de relaxation exponentielle dans la région critique mais plutôt une relaxation oscillante qui se traduit par la présence de deux maximums situés symétriquement par rapport à la fréquence centrale $\omega = 0$ dans la variation de la fonction $\Phi_{\vec{q}}^0(\omega)$ (cf. la figure (5)). Cette forme de la fonction relaxation serait compatible avec l'existence des ondes de spin suggérée par Marshall^[16].

E - VARIATIONS DES CONSTANTES D et Λ AVEC LA TEMPÉRATURE

Dans la réalité on mesure les variations des différentes grandeurs que sont l'aimantation, la constante des ondes de spin et la constante de diffusion en fonction de la température plutôt qu'en fonction de la longueur de la cohérence. Plus exactement comme nous nous intéressons au voisinage de la température de Curie nous voulons déterminer les variations de ces grandeurs en fonction de l'écart relatif $\frac{T-T_c}{T_c}$.

A proximité de la température de Curie, nous pouvons déterminer les variations des grandeurs telles l'aimantation moyenne, la susceptibilité et la

longueur de cohérence par des lois du type [13]:

$$|\langle \vec{M} \rangle| \propto \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^\beta$$

$$\chi \propto \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^{-\gamma}$$

$$\xi \propto \begin{cases} \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{-\nu'} & T < T_c \\ \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^{-\nu} & T > T_c \end{cases}$$

qui définissent les exposants critiques β, γ, ν' et ν . A priori nous n'avons aucune raison de supposer que les exposants ν' et ν sont égaux. Les exposants γ et ν sont reliés à l'exposant de Fisher par la formule (I.25) que nous rappelons :

$$\gamma = (2 - \eta) \nu$$

Les exposants β et ν' d'autre part sont aussi reliés à l'exposant de Fisher grâce à (I.46) par l'expression :

$$2\beta = (1 + \eta) \nu'$$

A présent écrivons les lois de variation des constantes D et Λ en fonction de l'écart relatif $\frac{T - T_c}{T_c}$:

$$D \propto \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{\nu'}$$

$$\Lambda \propto \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^{\nu}$$

Ces lois définissent des exposants critiques ν' et ν que nous pouvons appeler exposants critiques "dynamiques" par opposition aux exposants critiques "statiques" que sont β, γ, ν' et ν .

On exprime facilement les exposants critiques dynamiques en fonction des exposants critiques statiques :

$$\nu' = \beta \frac{1 - \eta}{1 + \eta} = \nu' - \beta$$

$$\nu = \frac{1}{4} \gamma \frac{1 - \eta}{1 - \frac{1}{2}\eta} = \frac{\gamma}{\nu'} (\nu' - \beta)$$

Dans le modèle d'Ising à trois dimensions on connaît des estimations assez précises des divers exposants critiques statiques ; il n'en est plus de même dans le cas du modèle d'Heisenberg à trois dimensions où les seules estimations connues concernent les exposants γ, ν et η et encore dépendent-elles de la grandeur du spin attaché à chaque site du réseau. ^[32] N'entrons pas dans des détails qui nous éloigneraient de notre sujet, disons simplement que les estimations des exposants critiques dynamiques sont pratiquement égales :

$$\nu' \approx \nu \approx 0,33 \quad (I.48)$$

pour le modèle d'Heisenberg. ^[32] [13]

Ainsi la propriété remarquable des lois d'échelle concernant les variations des constantes D et Λ avec la longueur de cohérence ξ reste encore valable dans le modèle d'Heisenberg si on remplace celle-ci par la valeur absolue du rapport $\frac{T-T_c}{T_c}$.

IV - SITUATION EXPERIMENTALE

Il est difficile de trouver un matériau ferromagnétique que l'on puisse considérer comme un système magnétique isotrope auquel s'appliqueraient notamment les résultats du modèle d'Heisenberg. En réalité il existe toujours en plus de l'interaction d'échange une interaction dipolaire anisotrope.

Collins et ses collaborateurs ont bien mis en évidence l'interaction dipolaire dans le fer au cours de leur étude des ondes de spin par diffusion inélastique des neutrons^[21]. Par ailleurs les substances ferromagnétiques sont pour la plupart des métaux et la présence des électrons de conduction de même que l'interaction dipolaire anisotrope peuvent affecter la variation des diverses quantités présentant un comportement critique au voisinage de la température de Curie telles la constante des ondes de spin D et, la constante de diffusion Λ et le paramètre K_1 , variation que nous avons prévue pour un système isolant et isotrope^[20].

L'existence du freinage cinématique constitue un autre inconvénient pour l'étude des phénomènes critiques dans les systèmes ferromagnétiques, nous en apporterons une preuve un peu plus loin.

Toutes les raisons que nous venons d'invoquer ont fait dire que les matériaux ferromagnétiques ne constituaient pas des systèmes aussi appropriés que les matériaux antiferromagnétiques pour vérifier expérimentalement les prévisions de la théorie des lois d'échelle. En effet outre que les antiferromagnétiques sont le plus souvent des isolants, ils ne présentent pas une part dipolaire dans l'interaction magnétique aussi importante que dans le cas des ferromagnétiques ; de plus il n'existe pas pour eux de phénomène de freinage cinématique.

A - CONFRONTATION DE LA THEORIE AVEC LES EXPERIENCES DEJA REALISEES

Ce sont les expériences de diffusion des neutrons de Jacrot et ses collaborateurs^[14] qui mirent en défaut pour la première fois la théorie conventionnelle^{[2][5]}. Ces expériences furent réalisées sur le fer. Le désaccord portait essentiellement sur la variation du temps de relaxation τ_q aussi bien avec la température qu'avec le module du vecteur de diffusion q . Les résultats

de Jacrot ont été, par la suite, confirmés par les mesures de Passel et de ses collaborateurs^[15]. Les expériences de Jacrot mettaient en évidence l'existence d'une constante de diffusion à toute température, c'est-à-dire entre autre à la température de Curie dont la valeur semblait indépendante de la température. Ce résultat ne concorde guère avec les prévisions de la théorie des lois d'échelle et des théories microscopiques récentes. Cependant si la précision des mesures est telle qu'elle permet d'infirmer la théorie conventionnelle, elle n'est pas suffisante pour nous autoriser à rejeter les autres théories. En effet comme l'a montré Villain dans son interprétation des résultats expérimentaux de Jacrot^[25] la présence du freinage cinématique dans les systèmes ferromagnétiques constitue un inconvénient non négligeable pour l'étude de leurs propriétés dynamiques : A température fixe, supérieure à T_c , la dépendance du temps de relaxation τ_q suivant le vecteur $\vec{q}$, de proportionnelle au terme q^{-2} dans la région hydrodynamique (III) se modifie insensiblement quand le module du vecteur $\vec{q}$ augmente pour finalement devenir proportionnelle au terme $q^{-5/2}$ quand la région critique (II) est atteinte. La différence entre ces deux types de dépendance du temps de relaxation τ_q s'avère dans la pratique difficile à observer s'il n'est pas pris de précautions particulières dans les mesures par diffusion des neutrons.

Les expériences récentes réalisées à Brookhaven (sur le HFBR)^{[21][22][23][33]} montrent clairement les différences de comportement de la relaxation dans les trois régions du $1/2$ plan (q, ξ^{-1}) . Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau III, dans lequel figurent aussi les estimations théoriques des quantités mesurées. Pour tous les matériaux étudiés, Fe, Ni et MnP nous avons en fait rassemblé les valeurs expérimentales des exposants critiques z de la fréquence caractéristique dans la région (II) et de v' et v respectivement exposants de la constante des ondes de spin et de la constante de diffusion. L'examen de ce tableau montre que :

a) Dans la région critique (II) l'accord entre les diverses valeurs expérimentales de l'exposant z et la valeur calculée dans le modèle d'Heisenberg en utilisant l'expression donnée par la théorie des lois d'échelle est bon. C'est un succès de la théorie des lois d'échelle ; cependant compte tenu de l'erreur affectant chaque valeur expérimentale de cet exposant l'influence de l'exposant de Fisher η est impossible à percevoir (une estimation de cet exposant η paraît bien illusoire à partir des mesures de diffusion inélastique des neutrons).

TABLEAU III

$\epsilon \equiv \frac{T-T_c}{T_c}$		Valeurs des exposants critiques			
	Quantité observée	Exposant critique correspondant	Prévisions théoriques		Résultats expérimentaux
			Théorie des "lois d'échelle" [20]	Estimations dans le modèle d'Heisenberg à 3 dimensions [13][32]	
Région (I)	Constante des ondes de spin D : $D \propto (-\epsilon)^{\nu'}$	ν'	$\nu' - \beta$	$\approx 0,33$	Fe $0,37 \pm 0,03$ [21] Ni $0,39 \pm 0,04$ [22] MnP $2,57 \pm 0,20$ [33]
Région (II)	Fréquence caractéristique $\omega_{\infty}^2(\vec{q}) :$ $\vec{M}_{\infty}(\vec{q}) \propto q^z$	z	$\frac{5-\eta}{2}$	$\approx 2,46$	
Région (III)	Constante de diffusion $\Lambda :$ $\Lambda \propto \epsilon^{\frac{\nu}{\nu'}}$	ν	$\frac{\nu}{\nu'} (\nu' - \beta)$	$\approx 0,33$	

Comparaison entre les valeurs théoriques et expérimentales des exposants critiques dynamiques z , ν et ν' .

b) Dans la région hydrodynamique des ondes de spin (I) les valeurs de l'exposant critique v' trouvées pour le fer et le nickel sont légèrement plus élevées que son estimation théorique dans le modèle d'Heisenberg mais l'écart n'est pas encore suffisamment grand pour qu'on puisse y voir un désaccord entre les résultats de l'expérience et la théorie des lois d'échelle.

c) Dans la région hydrodynamique supérieure (III) les valeurs expérimentales de l'exposant critique v de la constante de diffusion Λ sont soit inférieures (c'est le cas du fer), soit supérieures (c'est le cas du nickel) à la valeur théorique. Néanmoins on peut tout de même remarquer que dans le cas du nickel les déterminations expérimentales des exposants v' et v (la seconde détermination plus récente en ce qui concerne l'exposant v) laisseraient prévoir une égalité de ces deux exposants, ce qui est l'un des résultats qualitatifs importants de la théorie des lois d'échelle.

En résumé il apparaît donc que les prévisions théoriques des lois d'échelle ne sont pas toutes vérifiées. Il s'agit à présent dans la mesure du possible, d'expliquer certaines des divergences.

Très récemment J. Als Nielsen ^[34] a trouvé une explication satisfaisante à la faible valeur de l'exposant v dans le cas du fer : une nouvelle analyse des résultats de Collins à partir de la fonction d'échelle $f(K_1/q)$ calculée par Résibois et Piette montre clairement que les expériences n'ont pas été réalisées dans la région hydrodynamique. Nous reviendrons sur cette interprétation quand on abordera dans la troisième partie l'analyse de nos propres résultats.

Les raisons de la valeur élevée de l'exposant v dans le cas du nickel, par contre, restent encore obscures. Minkiewicz ^[23] affirme avoir atteint la région hydrodynamique par ses mesures. Cette affirmation semble uniquement reposer sur la forte variation de la constante de diffusion Λ avec la température. Il est raisonnable d'attribuer la valeur élevée de l'exposant v au caractère métallique du nickel, caractère métallique certainement plus affirmé que celui du fer. Dans le nickel et à un degré moindre dans le fer la portée de l'interaction d'échange est grande, comparée aux distances interatomiques et du fait de cette grande étendue de l'interaction d'échange le nombre de voisins d'un atome magnétique donné est grand, ce qui rend raisonnable d'une part l'approximation du champ moléculaire et d'autre part la théorie conventionnelle. Les valeurs expérimentales de l'exposant v trouvées pour le nickel résulteraient en quelque

sorte d'un compromis entre la valeur égale à l'unité prévue par la théorie conventionnelle et l'approximation du champ moléculaire* et la valeur 0,33 déduite des relations (cf. I.III.E) des lois d'échelle quand on attribue aux divers exposants critiques des grandeurs statiques les valeurs prévues par le modèle d'Heisenberg. [32] [13]

A cette occasion il nous apparait utile cependant de rappeler que les valeurs expérimentales des exposants critiques relatifs aux grandeurs thermodynamiques statiques (telles l'aimantation et la susceptibilité) sont dans le cas du fer et du nickel en bon accord avec les valeurs théoriques du modèle d'Heisenberg. [32] [35] L'existence d'interactions à longue portée tant d'échange que dipolaires serait néanmoins responsable des écarts observés dans les variations avec la température de la constante de diffusion Λ par rapport à ce que prévoit la théorie des lois d'échelle selon certains [22].

Les expériences de Collins font apparaitre que dans la région critique (II) la fonction relaxation s'éloigne assez dans sa forme d'une simple lorentzienne, elle présente deux petits épaulements situés symétriquement par rapport à la fréquence centrale $\omega = 0$. Résibois et De Leener ont vu dans ce résultat un indice du bien fondé de la présence d'une relaxation oscillante dans la région critique. Les résultats d'une expérience récente réalisée sur l'isolant MnP [33] qui est ferromagnétique indiquent qu'en-dessous de la température de Curie la variation avec ω de la fonction de corrélation $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$ présente en plus des deux maximum centrés sur les fréquences $\pm \omega_{\vec{q}}$ un maximum central ($\omega = 0$) (cf. la figure (')). Cette variation de la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$ rappelle celle observée par une autre équipe de Brookhaven sur l'isolant RbMnF_3 qui lui est antiferromagnétique [36]. Ce serait la première fois que les fluctuations longitudinales de l'aimantation auraient été décelées par diffusion des neutrons juste en-dessous de la température de Curie dans la région critique. Les fluctuations longitudinales ne se manifestent pas, semble-t-il ni dans le cas du fer ni dans celui du nickel.

* La théorie conventionnelle prévoit (cf. la relation (I.29) que la constante de diffusion Λ est proportionnelle à l'inverse de la susceptibilité χ , qui, elle-même, est inversement proportionnelle à l'écart de température $(T - T_c)$ dans l'approximation du champ moléculaire.

L'analogie qui existe entre RbMnF_3 et MnP et les différences observées entre ce dernier d'une part et le fer et le nickel d'autre part nous inciteraient à penser que les mécanismes de relaxation ne sont pas les mêmes dans les systèmes magnétiques selon qu'ils sont isolants ou conducteurs.

B - OBJET DES NOUVELLES EXPERIENCES REALISEES A SACLAY

L'objet des nouvelles expériences réalisées sur le Réacteur EL.3 à Saclay porte plus spécialement sur l'étude de la région hydrodynamique supérieure (III), région qui n'a pas été explorée par les mesures faites sur le Réacteur à haut flux de Brookhaven (H.F.B.R.). L'interprétation de cette étude expérimentale se trouve être grandement facilitée par les récents développements qu'ont apporté Résibois et Piette à la théorie des mécanismes de relaxation au voisinage de la température de Curie et qui permettent en particulier de préciser la frontière entre les régions critique et hydrodynamique.

Récapitulons les quelques formules essentielles qui sont à la base de notre étude expérimentale :

Avant toute chose nous supprimons l'indice 0 de la fonction relaxation $\Phi_q^0(\omega)$ et de la susceptibilité réduite $\hat{\chi}_q^\infty$ puisqu'au-dessus de la température de Curie nous n'avons plus de raison de distinguer entre fluctuations transversales et longitudinales de l'aimantation.

a) Dans une substance ferromagnétique isotrope la section efficace magnétique de diffusion des neutrons non-polarisés s'écrit simplement au-dessus de la température de Curie sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} \propto \frac{k'}{k} \hat{\chi}_q^\infty \Phi_q(\omega) .$$

b) Etant donné la faible valeur supposée de l'exposant de Fisher η nous considérons pour l'expression de la susceptibilité réduite $\hat{\chi}_q^\infty$ celle que nous donne la théorie simple de Ornstein-Zernike :

$$\hat{\chi}_q^\infty = \frac{1}{r_1^2 (k_1^2 + q^2)} . \quad (I.49)$$

Dans cette formule la variation du paramètre K_1^2 avec la température à proximité de la température de Curie est donnée par la loi suivante :

$$K_1^2 = B \left(\frac{T-T_c}{T_c} \right)^y . \quad (I.50)$$

En principe nous avons en vertu de la relation (I.25) :

$$y = 2\nu .$$

Au voisinage de la température de Curie le paramètre r_1^2 ne présente pratiquement pas de variation avec la température ce qui impose que le paramètre K_1^2 varie comme l'inverse de la susceptibilité χ ou encore que nous ayons l'égalité des exposants y et γ :

$$y = \gamma .$$

c) La fonction relaxation $\Phi_{\vec{q}}(\omega)$ est normalisée à l'unité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\vec{q}}(\omega) d\omega = 1 .$$

La fréquence caractéristique $\omega_{\vec{q}}^{\vec{M}}(\vec{q})$ que nous écrirons dorénavant $\omega_{K_1}(\vec{q})$ est simplement définie par la condition :

$$\int_{-\omega_{K_1}(\vec{q})}^{+\omega_{K_1}(\vec{q})} \Phi_{\vec{q}}(\omega) d\omega = \frac{1}{2} .$$

Les hypothèses des lois d'échelle permettent de prévoir :

(i) les expressions de la fréquence caractéristique $\omega_{K_1}(\vec{q})$ dans les régions critique $\left(\frac{K_1}{q} \ll 1 \right)$ et hydrodynamique $\left(\frac{K_1}{q} \gg 1 \right)$.

(ii) L'expression de la fonction relaxation dans la région hydrodynamique seule. Dans la région hydrodynamique la fonction relaxation conserve la forme lorentzienne qu'elle a à haute température ($T \gg T_c$) et à petit vecteur $\vec{q}$:

$$\Phi_{\vec{q}}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Lambda q^2}{\omega^2 + (\Lambda q^2)^2} . \quad (I.51)$$

Seulement dans le cas présent la constante de diffusion Λ varie avec la

température selon une loi que nous impose les hypothèses des lois d'échelle. Dans la région hydrodynamique la fréquence caractéristique est égale à $1/2$ largeur à mi-hauteur Λq^2 de la lorentzienne (I.51). Par ailleurs pour un ferromagnétique isotrope cette fréquence caractéristique, selon les hypothèses des lois d'échelle, s'écrit :

$$\omega_{K_1}(\vec{q}) = c q^{5/2} f\left(\frac{K_1}{q}\right) \quad (\eta = 0) \quad (I.52)$$

où $f\left(\frac{K_1}{q}\right)$ est la fonction d'échelle dont Résibois et Piette ont donné une expression générale. Dans la région hydrodynamique la fonction d'échelle doit avoir l'expression asymptotique suivante :

$$f\left(\frac{K_1}{q}\right) \propto \left(\frac{K_1}{q}\right)^{1/2} \quad \text{si} \quad \frac{K_1}{q} \gg 1 ,$$

si on veut traduire l'existence d'un mécanisme de diffusion pour la relaxation des fluctuations d'aimantation. Ainsi déduit-on une relation entre la constante Λ et le paramètre K_1 qui est la suivante :

$$\Lambda \propto K_1^{1/2} . \quad (I.53)$$

Dans la région hydrodynamique où la susceptibilité réduite est donnée par la formule de Ornstein-Zernike (I.49) et la fonction relaxation par la relation (I.51) la section efficace magnétique s'écrit :

$$\frac{d^2}{d\Omega d\omega} \propto \frac{k'}{k} \frac{1}{r_1^2 (K_1^2 + q^2)} \frac{\Lambda q^2}{\omega^2 + (\Lambda q^2)^2} . \quad (I.54)$$

C'est l'expression de Van Hove.

DEUXIEME PARTIE

Dans toutes les mesures, les analyses et la présentation des résultats expérimentaux sur la diffusion critique des neutrons on se heurte au moins à deux grandes difficultés :

(a) L'une est fondamentale. L'expérience a pour but de vérifier des lois limites valables soit dans la région critique, soit dans la région hydrodynamique alors que le domaine des vecteurs $\vec{q}$ couvert par les mesures neutroniques correspond plutôt à la région intermédiaire entre les deux régions asymptotiques que nous venons de citer. En particulier ces mesures atteignent difficilement la région hydrodynamique où la théorie prévoit précisément aussi bien la variation de la constante de diffusion Λ avec la température que la forme analytique de la fonction relaxation $\Phi_{\vec{q}}(\omega)$.

(b) L'autre est plus technique. Les expériences étant souvent faites à la limite du pouvoir de résolution des spectromètres à trois axes où à temps de vol, les corrections instrumentales, toujours importantes, doivent être faites avec soin et ceci n'est possible que si les formes théoriques des spectres sont raisonnablement bonnes, ce qui suppose que les mesures soient faites dans le domaine de validité des lois théoriques à vérifier au moins dans une région proche de ce domaine.

Après une description succincte du dispositif expérimental, on rappelle les diverses incertitudes qu'il introduit dans la mesure de l'énergie des neutrons (chapitre I). Ces incertitudes font intervenir ce qu'on appelle des corrections de résolution instrumentale dans la détermination des paramètres qui figurent dans l'expression théorique de la section efficace. Nous consacrons tout un chapitre (chapitre II) à la résolution instrumentale. Compte tenu de la forme de la fonction de résolution nous exposons dans le dernier chapitre (chapitre III) la méthode d'analyse des spectres observés. Nous nous efforçons d'expliquer toutes les approximations faites.

I - DESCRIPTION DES DIVERS ELEMENTS DE L'EXPERIENCE

A - DESCRIPTION DU FOUR ET MESURE DE LA TEMPERATURE

Le four, spécialement conçu pour l'étude de la diffusion aux petits angles, a été réalisé par M. Mihalović. Une vue en coupe verticale est donnée en figure (6). Ce four doit répondre aux exigences suivantes :

(a) Possibilité de conserver la température de l'échantillon aussi constante que possible pendant un laps de temps important (plusieurs heures).

(b) Uniformité de température aussi grande que possible à travers tout l'échantillon.

Pour satisfaire de pareilles exigences :

(a') Le four doit posséder soit une faible inertie thermique, soit une forte. (Dans le premier cas il est nécessaire que le chauffage de l'échantillon soit très finement régulé).

(b') L'échantillon doit être aussi complètement que possible environné par l'élément chauffant. La moindre dissymétrie de disposition est cause de gradient de température dans l'échantillon. Cette condition ne peut être que partiellement remplie du fait que les neutrons, sur leur passage, doivent rencontrer le minimum d'obstacles autres que l'échantillon lui-même.

L'élément essentiel du four est un cylindre (mandrin) de fer ARMCO (polycristallin) évidé intérieurement sauf en sa partie centrale où subsiste une certaine épaisseur de matière. Le cylindre partiellement creux a une longueur de 130 mm, des diamètres intérieur et extérieur de 25 mm et 47 mm ; l'échantillon est constitué par l'épaisseur centrale de matière égale à 4 mm (cf. figures (6) et (7)). Le cylindre est chauffé dans sa totalité par une résistance sur la surface latérale. La résistance chauffante est constituée par un fil de manganin à résistivité élevée placé dans une gaine en inconel, l'isolement électrique entre le fil et la gaine étant assuré par de la magnésie. Afin que le chauffage soit le plus uniforme possible, l'enroulement est jointif et de plus pour diminuer au maximum l'inertie thermique il est rendu solidaire du cylindre

après avoir subi un frettage par magnétostriction. Pour éviter que la présence d'un champ magnétique stationnaire induit dans le fer ne vienne perturber les mesures nous avons :

(a'') utilisé le courant alternatif,

(b'') enroulé la résistance autour du cylindre d'abord dans un sens puis en revenant en arrière dans le sens opposé.

Ces deux précautions devraient permettre d'annuler localement et à tout instant le champ magnétique induit.

Afin d'obtenir un bon isolement thermique le cylindre est glissé à l'intérieur d'un manchon en feutre de silice (matière présentant une faible conductibilité thermique) et l'ensemble cylindre-manchon est placé sous vide. Pour parfaire cet isolement et assurer une uniformité de température satisfaisante dans l'échantillon, nous avons disposé de part et d'autre de celui-ci une série d'écrans thermiques en molybdène. Ces écrans sont de faible épaisseur (0,1 mm) afin que leur présence ne soit pas la source d'une diffusion des neutrons trop importante. La puissance électrique nécessaire pour maintenir une température de 800°C dans l'échantillon est égale à environ 100 watts. A cause de cette faible puissance la régulation de la température s'en trouve facilitée. La méthode de régulation que nous avons employée est tout-à-fait classique, elle utilise comme élément sensible aux variations de température un thermocouple chromel-alumel. Dans son principe une "boucle" de régulation est conçue de façon que la puissance électrique débitée dans la résistance chauffante soit ajustée en permanence de façon à garder constante la température du thermocouple de contrôle. La boucle est composée, outre le thermocouple de contrôle, d'une source de tension hautement stabilisée qui délivre une f.e.m. de référence correspondant à une température désirée, d'un nanovoltmètre qui joue le rôle de détecteur de zéro en mesurant la différence entre les f.e.m. de référence et du thermocouple, d'un régulateur à trois actions (proportionnelle, dérivée et intégrale) dont le fonctionnement est commandé par la différence de tension précédente que le nanovoltmètre a préalablement amplifiée. Les puissances que peut fournir le régulateur à trois actions étant faibles (quelques mW) nous lui avons adjoint un dispositif à thyristors qui peut donner au circuit de chauffage du four la puissance désirée. La température de l'échantillon est mesurée par un second thermocouple chromel-alumel, la température de référence des deux thermocouples (mesure et contrôle) est celle de l'équilibre eau-glace

fondante sous pression atmosphérique. Nous avons essayé de tenir compte le mieux possible des problèmes de soudure froide qui sont toujours délicats. Les mesures de la température de l'échantillon sont effectuées à l'aide d'un pont potentiométrique en utilisant les tables de correspondance f.e.m-températures pour le thermocouple chromel-alumel qu'on trouve dans la littérature. C'est dire que nous n'avons pas cherché à faire un étalonnage de notre thermocouple de mesure car les mesures absolues de température, ne nous intéressent guère. Dans l'étude des phénomènes critiques en général seules sont intéressantes les mesures précises des intervalles de température ($T-T_c$). La température de l'échantillon ne présente pas d'écarts supérieurs à $0,25^\circ\text{C}$ sur une période de plusieurs heures ; quant au gradient de température des mesures préliminaires ont montré qu'il reste inférieur à $0,4^\circ\text{C}/\text{cm}$. Les neutrons incidents pénètrent dans le four suivant l'axe du cylindre. De par sa conception on se rend compte que ce four ne peut servir qu'à l'étude de la diffusion des neutrons aux petits angles. Pour éviter la diffusion des neutrons par les parties du cylindre autres que la partie échantillon, nous avons glissé deux tubes en carbure de bore (B_4C) à l'intérieur de celui-ci. L'épaisseur de carbure de bore égale à 2,5 mm est largement suffisante pour absorber les neutrons.

B - DISPOSITIF EXPERIMENTAL - CHOIX DES DIVERS PARAMETRES

Les dispositifs expérimentaux utilisés pour obtenir des neutrons incidents monochromatiques et ceux pour analyser les neutrons diffusés suivant leurs énergies ont déjà fait l'objet de nombreuses descriptions. La mesure des processus de diffusion inélastique repose sur au moins deux méthodes :

(a) La méthode du spectromètre à trois axes ; elle est communément utilisée sur le réacteur à haut flux de Brookhaven (HFBR).^{[21] [22] [23]}

(b) La méthode du spectromètre à temps de vol ; c'est cette dernière que nous avons utilisée sur le réacteur EL.3 du CEN-Saclay.

Le principe de la méthode de temps de vol est simple : on mesure les énergies des neutrons en mesurant les temps qu'ils mettent pour parcourir une distance donnée. Tout d'abord un sélecteur mécanique encore appelé "Double Chopper" dont la conception est due à MM. Gobert et Jacrot découpe le faisceau incident issu du réacteur en "pulses" de neutrons sensiblement mono énergétiques

[38]
avant qu'il atteigne l'échantillon. Ce sélecteur est constitué de deux disques identiques séparés par une distance L qui tournent autour d'un même axe horizontal vertical (figure (8)). Sur la partie périphérique de chaque disque on a pratiqué huit fentes rectangulaires identiques également espacées ; pour chacune d'elles la plus grande dimension est suivant un diamètre. Sur le trajet des neutrons incidents on a aussi mis en place deux fentes rectangulaires fixes, l'une à la sortie du canal et avant le premier disque, l'autre à la sortie du sélecteur mécanique juste après le second disque et avant le four. Ces deux fentes fixes délimitent les divergences angulaires horizontale et verticale du faisceau incident. Les deux disques sont accouplés par une boîte de vitesse (différentiel) et entraînés par un moteur électrique situé dans le prolongement de l'axe de rotation commun des deux disques à la sortie du sélecteur mécanique. Le différentiel permet de régler de façon continue l'écart angulaire Φ entre fentes homologues sur les deux disques (ce qui suppose un numérotage identique des fentes sur les deux disques). Le choix du déphasage Φ fixe la longueur d'onde moyenne λ_0 des neutrons sortants du sélecteur mécanique. La durée de chaque "pulse" est fonction de la largeur des fentes fixes et des fentes mobiles et de la vitesse angulaire de rotation des disques Ω . La longueur d'onde moyenne est donnée par la relation :

$$\lambda_0 = 3956 \frac{\Phi}{\Omega L} ,$$

où λ_0 est donné en Å si L est mesuré en mètres.

La détection des neutrons est faite par un compteur proportionnel à fluorure de Bore et la mesure de leurs énergies par un analyseur électronique multicanaux. Le compteur est un long cylindre disposé verticalement et devant lui on dispose en général une fenêtre pratiquée dans une feuille de cadmium et dont la forme et la surface varient suivant le type d'expérience (figure (9)). Le sélecteur électronique comprend 256 canaux, son rôle est de classer les neutrons d'un même pulse d'après leurs temps d'arrivée dans le compteur. Les canaux comptent successivement, les neutrons pendant un temps δ . L'ouverture du premier canal est déclenchée pour chaque pulse par le passage d'une fente mobile du second disque devant la fente fixe située à la sortie du sélecteur mécanique. Dans la pratique ce déclenchement s'effectue à l'aide d'un signal optique : A la verticale de la fente fixe et en-dessous de celle-ci on a pratiqué une fente fine et l'on fait de même suivant les diamètres de

toutes les fentes neutroniques du second disque. Ces fentes fines homologues des fentes neutroniques sont appelées fentes optiques. La fente optique fixe laisse passer un fin pinceau lumineux émis par une source collimatrice placée en avant du sélecteur mécanique ; ce pinceau lumineux ne traversera le second disque que s'il rencontre une fente optique mobile et dans ce cas le signal lumineux est recueilli par un photomultiplicateur qui le transforme en impulsion électrique qui commande l'ouverture du premier canal. Le déclenchement de l'ouverture du premier canal peut être retardé , afin de recueillir dans la partie centrale de la zone d'exploration de l'analyseur multicanaux, la distribution des neutrons du pulse incident qui ont été diffusés par l'échantillon. Ainsi la distance sur laquelle on mesure les temps de parcours des neutrons est la distance D qui sépare le second disque du sélecteur mécanique du compteur. Comme l'échantillon dans notre montage expérimental est situé entre le sélecteur mécanique et le compteur, les neutrons parcourent donc une certaine distance avant de subir le processus de diffusion susceptible de modifier leurs énergies et la mesure de la diffusion inélastique va s'en trouver quelque peu faussée si on néglige d'introduire dans les analyses le terme correctif adéquat, terme d'autant plus petit que le four sera plus proche du second disque du sélecteur mécanique. En fait des empêchements stériques (volume du four etc...) font que la distance minimum séparant le second disque de l'échantillon ne peut pas être inférieure à 0,25 m.

A cause de la largeur des fentes neutroniques des disques du sélecteur mécanique et de la divergence angulaire du faisceau incident, les neutrons émis dans un pulse ne sont pas rigoureusement monocinétiques. De plus les systèmes de détection (compteur) et d'analyse (analyseur multicanaux) introduisent des incertitudes dans la mesure des énergies des neutrons :

(a) L'épaisseur du compteur qui fait qu'on ne connaît pas l'endroit exact où le neutron est détecté et par voie de conséquence la distance sur laquelle on mesure le temps de vol des neutrons.

(b) Le temps d'ouverture δ d'un canal de l'analyseur et la durée du pulse à la sortie du sélecteur due aux largeurs non nulles des fentes font que le temps de vol lui-même ne peut être connu exactement.

L'ensemble de ces incertitudes fait qu'on ne peut pas déduire directement par une simple correspondance entre les temps et les énergies la section efficace

$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}$ de l'enregistrement de la distribution en temps de vol des neutrons détectés effectué par l'analyseur, il nous faut introduire dans l'analyse des résultats expérimentaux ce qu'on appelle des corrections de résolution.

Dans le choix des paramètres expérimentaux que sont la vitesse de rotation des disques, le déphasage, la largeur des fentes neutroniques, la distance entre le sélecteur et le compteur, le temps d'ouverture d'un canal de l'analyseur, etc... nous sommes guidés par :

(a') le type de processus de diffusion inélastique étudié

(b') le souci de diminuer au maximum les corrections de résolution à effectuer.

Nous savons que le processus de diffusion inélastique que nous vous proposons d'étudier est un processus de diffusion quasi-élastique qui ne fait en conséquence qu'élargir faiblement la distribution en énergie des neutrons incidents, aussi le choix des paramètres expérimentaux pourra être fait sans échantillon ou en négligeant son existence.

Afin de diminuer l'incertitude sur la connaissance de la distance de temps de vol produite par l'épaisseur du compteur nous avons tout intérêt à éloigner le plus possible ce dernier de l'échantillon ou du sélecteur mécanique, d'autant que nous améliorons ainsi le "pouvoir séparateur" de l'analyseur. En effet plus la distance de temps de vol est grande, plus il est facile de séparer les neutrons de vitesse différente. Cependant cette distance ne peut pas être fixée arbitrairement : d'une part pour des raisons d'intensité (l'angle solide sous lequel est vu l'échantillon la surface de détection diminue au fur et à mesure qu'on éloigne le compteur) d'autre part parce que la durée du pulse au niveau du compteur doit rester inférieure au temps total (256 δ) d'exploration de l'analyseur. Si 2Δ représente l'intervalle de temps pendant lequel le sélecteur laisse passer les neutrons ou encore la durée du pulse, le temps d'exposition du compteur sera de l'ordre de $\frac{2D}{L} (2\Delta)$. Au cours du temps nous assistons à un "étalement" du pulse. La valeur de la distance D doit alors satisfaire à la condition :

$$2 \frac{D}{L} (2\Delta) < 256 \delta \quad . \quad (II.1)$$

Nous avons placé le compteur à 5 m de l'échantillon, c'est-à-dire à 5,25 m de la sortie du sélecteur mécanique ; là encore il nous était difficile d'éloigner

plus le compteur à cause de l'environnement dans le hall du réacteur. Le diamètre du compteur est égal à 5 cm et l'incertitude sur la distance de temps de vol est inférieure à 1 %.

Le temps de vol des neutrons sera d'autant mieux connu que la durée du pulse (2Δ) à la sortie du sélecteur et la durée d'ouverture δ d'un canal de l'analyseur seront plus petites. La durée du pulse à la sortie du sélecteur est donnée par la relation :

$$2\Delta = \frac{2h}{R\Omega} ,$$

où h est la largeur des fentes neutroniques mobiles et fixes (qui rappelons-le sont identiques) et R est la distance entre le centre du disque (par où passe l'axe de rotation de l'ensemble) et le milieu des fentes neutroniques mobiles. Cette durée sera d'autant plus petite que la vitesse de rotation du sélecteur sera plus élevée et que les fentes seront plus fines. Pour des raisons d'intensité évidentes les fentes ne peuvent pas être choisies aussi fines qu'on le désire et pour des raisons de tenue mécanique la vitesse de rotation périphérique ($R\Omega$) est limitée supérieurement ($R\Omega < 45 \text{ m/s}$).

Nous avons fixé dans nos expériences la fréquence de rotation à 3450 tours/mm et la largeur des fentes à 4 mm. Avec de telles données la durée du pulse (2Δ) est égale à 53 μs . Afin que la luminosité du sélecteur mécanique soit suffisante et compte tenu de la finesse des fentes il nous faudrait disposer d'un grand nombre de fentes. En réalité le nombre maximum de fentes sur chaque disque est égal à 8. A cause de la condition (II.1) la durée d'ouverture δ ne peut pas elle non plus être choisie aussi petite que l'on veut ; avec les diverses données numériques dont nous disposons le temps δ doit être supérieur à 2,2 μs .

Par ailleurs il est nécessaire que tous les neutrons d'un pulse soient détectés par le compteur avant que l'ouverture du premier canal ne soit à nouveau déclenchée par la sortie du sélecteur mécanique du pulse suivant, car il courerait alors le risque que les neutrons les plus rapides du nouveau pulse soient comptés dans les mêmes canaux de l'analyseur que les neutrons les plus lents du précédent. Ce risque est évité si nous pouvons imposer que le temps d'exploration total de l'analyseur soit inférieur à l'intervalle de temps T séparant le passage de deux fentes consécutives du second disque devant le faisceau incident :

$$256 \delta < T .$$

(II.2)

Si cette dernière condition est satisfaite nous pourrions faire coïncider les distributions des vitesses des neutrons provenant des différents pulses. Cette condition si elle est nécessaire n'est pas suffisante car il faudra assurer en plus la stabilisation du temps T et pour cela réaliser un contrôle rigoureux de la vitesse de rotation des disques, du déphasage Φ etc... si on veut que l'enregistrement de la somme de tous les pulses donne une image correcte de la distribution des vitesses sortant du sélecteur mécanique. Nous n'insisterons pas sur les moyens techniques utilisés pour y parvenir.

Le temps T est donné en fonction du nombre de fentes mobiles N (ici fixé à 8) et de la vitesse de rotation Ω du sélecteur par la formule :

$$T = \frac{2\pi}{N\Omega} .$$

La condition (II.2) du dessus s'écrit donc :

$$256 \delta < \frac{2\pi}{N\Omega} .$$

Cette condition, compte tenu des valeurs choisies ou fixées à priori pour la vitesse de rotation et le nombre de fentes, détermine une limite supérieure pour la durée d'ouverture δ d'un canal de l'analyseur :

$$\delta < \frac{2\pi \times 60 \times 10^{+6}}{256 \times 8 \times 3450 \times 2\pi} = 8,5 \text{ } \mu\text{s} .$$

Ainsi le choix de la longueur de la base D , de la vitesse de rotation des disques Ω , de la largeur L des fentes et de leur nombre N , restreint-il celui de la durée d'ouverture des canaux de l'analyseur.

Nous avons pris pour le temps δ une valeur égale à $8 \text{ } \mu\text{s}$ de façon à pouvoir explorer un domaine en longueur autour de la longueur d'onde moyenne λ_0 aussi grand que possible et qui soit compatible avec les conditions énoncées ci-dessus.

D'autre part nous avons fixé à $5000 \text{ } \mu\text{s}$ la valeur du retard au déclenchement de l'ouverture du premier canal de l'analyseur et la valeur du déphasage Φ entre les deux disques du sélecteur est choisie de façon à ce que la longueur d'onde moyenne λ_0 soit égale à $4,19 \text{ } \text{\AA}$. Alors la distribution des neutrons recueillis dans l'analyseur est centrée autour du canal numéro 70.

Avec la longueur d'onde λ_0 fixée à $4,19 \text{ \AA}$, la diffusion nucléaire cohérente est supprimée car cette valeur est supérieure à la longueur d'onde de coupure du fer ($\lambda_c = 4,05 \text{ \AA}$). Afin d'éliminer les neutrons de longueur d'onde inférieure à $4 \text{ \AA}$ nous avons placé sur le trajet du faisceau incident avant le sélecteur mécanique un filtre de béryllium (longueur d'onde de coupure $\lambda_c = 3,95 \text{ \AA}$). Au fond du canal du réacteur est logé un bulbe à hydrogène liquide. Ce dispositif (boucle à hydrogène liquide) a pour but d'améliorer dans des proportions notables le flux en neutrons froids ($\lambda > 4 \text{ \AA}$) (figure (9)).

II - RESOLUTION INSTRUMENTALE

Dans le paragraphe précédent nous avons vu que les neutrons d'un pulse ne sont pas rigoureusement monocinétiques, leurs longueurs d'onde λ sont voisines de la longueur d'onde moyenne λ_0 qui correspond au maximum de la distribution en temps de vol qu'on observe dans la zone d'exploration de l'analyseur multicanaux. Cette distribution est plus ou moins étroite suivant le choix des différents paramètres expérimentaux.

Dans le cas où n'existe pas le processus de diffusion quasi-élastique la distribution en temps de vol ne coïncide pas avec la fonction de transmission du sélecteur mécanique. En effet nous savons que le compteur et l'analyseur introduisent dans la mesure du temps de vol des neutrons leurs propres incertitudes instrumentales qui sont dues pour le premier à sa propre épaisseur et pour le second au temps d'ouverture δ de chaque canal.

En vue d'analyser aussi correctement que possible le processus de diffusion critique, il apparaît nécessaire de bien connaître la fonction transmission du sélecteur mécanique et la fonction de résolution de l'ensemble que constituent le compteur et l'analyseur.

A - ETUDE DE LA TRANSMISSION DU SELECTEUR MECANIQUE

C'est le défilement des fentes mobiles des disques devant les deux fentes fixes placées l'une à l'entrée et l'autre à la sortie du sélecteur mécanique qui produit les pulses de neutrons. Nous tenons compte explicitement de la divergence angulaire du faisceau sortant du canal du réacteur dans le plan horizontal car elle intervient de façon essentielle dans la distribution des vitesses des neutrons d'un pulse.

Pour des neutrons de vitesse v se propageant suivant une direction qui fait l'angle α avec l'axe du faisceau incident, nous supposons que les figures de transmission produites par les défilements d'une fente mobile du premier disque devant la fente fixe d'entrée et d'une fente mobile du second disque devant la fente fixe de sortie ne dépendent que du temps (et non de la vitesse des neutrons notamment). D'après le schéma de la figure (10), il est facile

de vérifier que la figure de transmission correspondant au défilement d'une fente mobile du premier disque devant la fente fixe d'entrée est un triangle et que celle correspondant au défilement d'une fente mobile du second disque devant la fente de sortie est un trapèze dont la forme dépend de la valeur de l'angle α (cf. figure(10)). Si l'origine des temps est prise à l'instant où la fente mobile du second disque est en position telle par rapport à la fente fixe de sortie que les neutrons se propagent parallèlement à l'axe du faisceau incident ($\alpha = 0$) commencent juste à sortir du sélecteur mécanique (cf. la figure (10)), les équations du triangle et du trapèze sont les suivantes :

(a) pour le triangle :

$$T_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -\frac{\Phi}{\Omega} - \frac{\ell\Delta}{h} |\alpha| \\ \frac{1}{\Delta} \left(t + \frac{\ell\Delta}{h} |\alpha| + \frac{\Phi}{\Omega} \right) & \text{si } -\frac{\Phi}{\Omega} - \frac{\ell\Delta}{h} |\alpha| < t < \Delta - \frac{\ell\Delta}{h} |\alpha| - \frac{\Phi}{\Omega} \\ \frac{1}{\Delta} \left(2\Delta - \frac{\ell\Delta}{h} |\alpha| - \frac{\Phi}{\Omega} - t \right) & \text{si } \Delta - \frac{\ell\Delta}{h} |\alpha| - \frac{\Phi}{\Omega} < t < 2\Delta - \frac{\ell\Delta}{h} |\alpha| - \frac{\Phi}{\Omega} \\ 0 & \text{si } t > 2\Delta - \frac{\ell\Delta}{h} |\alpha| - \frac{\Phi}{\Omega} \end{cases}$$

(b) pour le trapèze il existe en fait 2 équations selon que l'angle α est positif ou négatif (cf. le schéma de la figure (10)).

Si $0 < \alpha < \alpha_M$:

$$T_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{\ell\Delta}{h} \alpha \\ \frac{1}{\Delta} \left(t - \frac{\ell\Delta}{h} \alpha \right) & \text{si } \frac{\ell\Delta}{h} \alpha < t < \frac{\Delta}{h} [h - (L + \ell)\alpha] \\ 1 - \frac{L + 2\ell}{h} \alpha & \text{si } \frac{\Delta}{h} [h - (L + \ell)\alpha] < t < \frac{\Delta}{h} (h + \ell\alpha) \\ \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{h} (2h - (L + \ell)\alpha) - t \right) & \text{si } \frac{\Delta}{h} (h + \ell\alpha) < t < \frac{\Delta}{h} [2h - (L + \ell)\alpha] \\ 0 & \text{si } t > \frac{\Delta}{h} [2h - (L + \ell)\alpha] \end{cases}$$

si $-\alpha_M < \alpha < 0$:

$$T_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -\frac{\Delta}{h} (L+\ell)\alpha \\ \frac{1}{\Delta} \left[t + \frac{\Delta}{h} (L+\ell)\alpha \right] & \text{si } -\frac{\Delta}{h} (L+\ell)\alpha < t < \frac{\Delta}{h} (h+\ell\alpha) \\ 1 + \frac{L+2\ell}{h} \alpha & \text{si } \frac{\Delta}{h} (h+\ell\alpha) < t < \frac{\Delta}{h} [h-(L+\ell)\alpha] \\ \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\Delta}{h} (2h+\ell\alpha) - t \right] & \text{si } \frac{\Delta}{h} [h-(L+\ell)\alpha] < t < \frac{\Delta}{h} (2h+\ell\alpha) \\ 0 & \text{si } t > \frac{\Delta}{h} (2h+\ell\alpha) \end{cases}$$

Rappelons que :

(a') 2Δ et h sont respectivement le temps total de défilement d'une quelconque des fentes mobiles devant la fente fixe et la largeur des fentes mobiles fixes qui sont identiques.

(b') ℓ est la distance qui sépare soit le premier disque de la fente d'entrée, soit le second disque de la fente de sortie (cf. le schéma de la figure (11)).

(c') Les deux fentes fixes définissent deux angles d'ouverture extrêmes du faisceau incident, l'un dans le plan horizontal qui nous intéresse $2\alpha_M$, et l'autre dans le plan vertical $2\beta_M$. L'angle α_M est égal à :

$$\alpha_M = \frac{h}{L+2\ell} \quad . \quad (II.3)$$

Les largeurs à mi-hauteur du triangle et du trapèze sont égales à Δ ; de plus les pentes des côtés latéraux du triangle et du trapèze sont égales. Ces deux propriétés rendent aisée la construction graphique des figures de transmission (cf. la figure (11)). La hauteur du trapèze est égale à la quantité $\left(1 - \frac{|\alpha|}{\alpha_M}\right)$, aussi vérifie-t-on à posteriori que :

(a'') la transmission du sélecteur mécanique est nulle si $|\alpha| \geq \alpha_M$ comme on devait s'y attendre ;

(b'') la transmission du sélecteur mécanique est maximum pour $\alpha = 0$.

Les neutrons qui sortent en plus grand nombre suivant une direction qui fait l'angle α avec l'axe du faisceau incident sont ceux dont les vitesses

sont comprises entre les limites suivantes :

$$(a''') \quad \frac{v_0}{1+v_0 \frac{2\ell}{L} \frac{\Delta}{h} \alpha} < v < \frac{v_0}{1-v_0 \frac{\Delta}{h} \alpha} \quad \text{si} \quad 0 < \alpha < \alpha_M$$

$$b''') \quad \frac{v_0}{1-v_0 \frac{\Delta}{h} \alpha \left(1 + \frac{2\ell}{L}\right)} < v < v_0 \quad \text{si} \quad -\alpha_M < \alpha < 0$$

où : $v_0 \equiv \frac{\Omega}{\Phi} L$.

Pour les neutrons se propageant suivant l'axe incident ($\alpha = 0$) les figures de transmission deviennent identiques (cf. figure (11)). Le trapèze se transforme en triangle. Alors les neutrons qui traversent en plus grand nombre le sélecteur mécanique suivant l'axe incident sont ceux dont la vitesse est égale à v_0 . Comme nous savons que la transmission du sélecteur mécanique atteint son maximum pour $\alpha = 0$, nous pouvons affirmer que v_0 est la vitesse la plus probable des neutrons de chaque pulse. C'est cette vitesse la plus probable que nous appelons aussi vitesse moyenne des neutrons issus du sélecteur mécanique.

Plutôt que la vitesse v nous utiliserons le temps de vol $\tau = \frac{1}{v}$ qui n'a pas les dimensions d'un vrai temps. Le temps de vol τ , comme nous le verrons, s'avère d'un emploi plus souple que la vitesse v .

A présent, nous pouvons écrire la fonction transmission de l'ensemble des deux disques du sélecteur mécanique. L'intensité des neutrons de vitesse v (ou de temps de vol τ) à l'instant t à la distance D du second disque s'écrit :

$$T_{12}(t, \tau, D) = T_1(t, \tau, D+L) T_2(t, \tau, D) .$$

La forme des figures de transmission des deux disques est indépendante du temps de vol τ ; la loi de conservation du nombre de neutrons permet d'écrire :

$$T_1(t, \tau, D+L) = T_1(t-D\tau-L\tau, \tau, 0)$$

$$T_2(t, \tau, D) = T_2(t-D\tau, \tau, 0)$$

et :

$$T_{12}(t, \tau, D) = T_1(t - D\tau, \tau, 0) T_2(t - D\tau, \tau, 0) .$$

Si un processus de diffusion (qui fait passer le temps de vol du neutron de la valeur τ à la valeur τ' ($\tau \rightarrow \tau'$)) se produit à une distance d du second disque, on écrit :

$$T_1(t, \tau', D+L) = T_1(t - d\tau - d'\tau', \tau', 0)$$

$$T_2(t, \tau', D) = T_2(t - d\tau - d'\tau', \tau', 0)$$

où : $D = d + d'$.

B - RESOLUTION DE L'ENSEMBLE INSTRUMENTAL

Dans l'analyse des spectres observés sur l'analyseur multicanaux nous négligeons la divergence angulaire des neutrons diffusés. A première vue cela peut paraître étonnant car le processus de diffusion critique est comme nous l'avons vu en première partie (cf. I.I.E), fortement localisé autour de la direction incidente, ce qui revient à dire que le phénomène est très sensible à la valeur du vecteur de diffusion $\vec{q}$. En fait tant qu'on se limite à l'étude de la région hydrodynamique on a tout lieu de penser que la divergence angulaire n'apporte pas de correction importante puisqu'alors le processus de diffusion critique tend à devenir indépendant du terme q^2 et ne présente de variation sensible qu'avec la température.

Néanmoins nous prenons en considération la divergence angulaire horizontale du faisceau incident car elle intervient explicitement dans la résolution instrumentale. Etant donné les faibles valeurs du transfert d'énergie $\hbar\omega$ et de l'angle de diffusion moyen $\bar{\theta}_s$ suivant lequel vont se propager les neutrons diffusés, il est nécessaire de prendre beaucoup de précautions dans le choix des approximations à faire pour analyser le plus correctement possible les résultats expérimentaux.

Faisons l'hypothèse que tous les neutrons quels que soient leurs vitesses parcourent une même distance moyenne $\bar{D}$ qui reste à déterminer. Cette distance moyenne est la somme de la distance parcourue par les neutrons entre la sortie du sélecteur mécanique et la fenêtre d'entrée du compteur et d'un libre parcours

moyen dans le compteur que nous supposons donc, bien que cela soit inexact, indépendant de la vitesse des neutrons.

Le nombre de neutrons diffusés par l'échantillon suivant l'angle $\bar{\theta}_s$ et qui sont comptés dans le canal n de l'analyseur s'écrit moyennant les hypothèses ci-dessus :

$$I(\bar{\theta}_s, n) = \int_{t_n - \frac{\delta}{2}}^{t_n + \frac{\delta}{2}} dt \int_{-\alpha_M}^{+\alpha_M} d\alpha \iint d\tau d\tau' T_1 [t - (d+L)\tau - (\bar{D}-d)\tau', \tau, 0] T_2 [t - d\tau - (\bar{D}-d)\tau', \tau, 0] P(\tau \rightarrow \tau', \alpha, \bar{\theta}_s) + F \quad (II.4)$$

Dans cette intégrale compliquée :

(a) $P(\tau \rightarrow \tau', \alpha, \bar{\theta}_s)$ représente la probabilité de transition ;

(b) t_n est le "temps vrai" correspondant au milieu du canal n , il s'écrit :

$$t_n = R - \Delta + \delta \left(\frac{1}{2} + n \right)$$

où R est la longueur de la ligne à retard.

(c) F est le bruit de fond.

On peut légèrement modifier l'intégrale (II.4) si on remarque que la fonction probabilité qu'à le canal n de compter un neutron se traduit par un rectangle de largeur δ et qu'on peut écrire en conséquence :

$$Y(t - t_n + \frac{\delta}{2}) \left[1 - Y(t - t_n - \frac{\delta}{2}) \right]$$

où Y est la fonction d'Heaveside.

$$I(\bar{\theta}_s, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\alpha_M}^{+\alpha_M} d\alpha \iint d\tau d\tau' T_1 [\quad] T_2 [\quad] P(\tau \rightarrow \tau', \alpha, \bar{\theta}_s) Y(\quad) [1 - Y(\quad)] + F \quad .$$

Même si on connaît la forme exacte de P cette intégrale est impossible pratiquement à calculer. Nous allons donc effectuer un certain nombre d'approximations :

(a') La première approximation consiste à remplacer les triangle et trapèze des figures de transmission du premier et second disque (figure (11)) et le rectangle représentant la probabilité de comptage d'un canal de l'analyseur

par des gaussiennes dont les aires et les moments sont égaux à celles et à ceux du triangle, du trapèze et du rectangle dont on est parti. Ainsi écrivons :

$$(i) \quad \mathcal{T}_1(t, \tau', \bar{D}+L) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta}{\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(t-t_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \quad \text{pour le triangle}$$

$$(ii) \quad \mathcal{T}_2(t, \tau', \bar{D}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta}{\sigma_2} \left(1 - \frac{|\alpha|}{\alpha_M}\right) \exp \left\{ -\frac{(t-t_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\} \quad \text{pour le trapèze}$$

$$(iii) \quad \mathcal{T}_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\delta} \exp \left\{ -\frac{(t-t_n)^2}{2\sigma_3^2} \right\} \quad \text{pour le rectangle}$$

$$\text{où : } t_1 \equiv \Delta - \frac{\ell\Delta}{h} |\alpha| - L\tau_0 + (L+d)\tau + (\bar{D}-d)\tau'$$

$$t_2 \equiv \Delta - \frac{L\Delta}{h} \alpha + d\tau + (\bar{D}+d)\tau'$$

$$\sigma_1^2 \equiv \frac{\Delta^2}{6} ; \quad \sigma_2^2 \equiv \frac{\Delta^2}{6} \left(1 - \frac{|\alpha|}{\alpha_M} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\alpha_M^2}\right) ; \quad \sigma_3^2 \equiv \frac{\delta^2}{12} .$$

(b') Dans l'expression de $\mathcal{T}_2(t, \tau', \bar{D})$ figure le terme $\left(1 - \frac{|\alpha|}{\alpha_M}\right)$ qui est l'équation d'un triangle et que nous allons remplacer par la gaussienne $\exp - \frac{\alpha^2}{2\eta_M^2}$ où le second moment est alors donné par la formule :

$$\eta_M^2 = \frac{1}{6} \alpha_M^2 . \quad (II.5)$$

Les approximations (a') et (b') permettent d'écrire $I(\bar{\theta}_s, n)$ sous la forme suivante :

$$I(\bar{\theta}_s, n) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2\eta_M^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' \mathcal{T}_1(t, \tau', \bar{D}+L) \mathcal{T}_2(t, \tau', \bar{D}) P(\tau, \tau', \alpha, \bar{\theta}_s) \mathcal{T}_3(t) + F .$$

L'intérêt de ces approximations est d'avoir à présent une intégrale multiple dont toutes les bornes sont : $\pm \infty$.

L'intégration suivant le temps t s'effectue facilement. Comme le second moment σ_3^2 est toujours très petit devant les seconds moments σ_1^2 et σ_2^2 , cela à cause du choix des divers paramètres expérimentaux, cette première intégration donne le résultat :

$$I(\bar{\theta}_s, n) \approx \iiint d\alpha d\tau d\tau' e^{-\frac{\alpha^2}{2\eta_M^2}} e^{-\frac{(t_1 - t_n)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(t_2 - t_n)^2}{2\sigma_2^2}} P(\tau \rightarrow \tau', \alpha, \bar{\theta}_s) + F$$

$$(\sigma_3^2 \ll \sigma_1^2, \sigma_2^2) \quad (II.6)$$

Dans la mesure où :

(i') l'échantillon est proche du sélecteur mécanique : $d \ll \bar{D}$

(ii') le processus de diffusion est quasi-élastique : $\frac{\tau - \tau'}{\tau} \ll 1$

(iii') nous pouvons négliger le terme 2ℓ devant L , distance qui sépare les deux disques du sélecteur ($2\ell/L \ll 1$).

L'intégrale (II.6) peut encore s'écrire :

$$I(\bar{\theta}_s, n) \approx \iiint d\alpha d\tau d\tau' e^{-\frac{\alpha^2}{2\eta_M^2}} e^{-\frac{(\tau - \tau_o + \alpha\Delta/2h)^2}{2\sigma_1^2/L^2}} e^{-\frac{(\tau' - \tau_n + \frac{\Delta}{D}(1 - \frac{L}{2h}\alpha))^2}{2\sigma'^2/\bar{D}^2}}$$

$$- \frac{(\tau' - \tau_n + \frac{\Delta}{D}(1 - \frac{L}{2h}\alpha)(\tau - \tau_o + \alpha\Delta/2h)}{\sigma_1^2/\bar{D}L}$$

$$e^{-\frac{(\tau' - \tau_n + \frac{\Delta}{D}(1 - \frac{L}{2h}\alpha)(\tau - \tau_o + \alpha\Delta/2h)}{\sigma_1^2/\bar{D}L}} P(\tau \rightarrow \tau', \alpha, \bar{\theta}_s) + F \quad (II.7)$$

où : $\sigma'^2 \equiv \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. C'est alors qu'on procède à une seconde série d'approximations importantes :

(a'') La première de ces nouvelles approximations consiste à ne pas tenir compte de l'existence de l'exponentielle $\exp \left\{ - \frac{(\tau' - \tau_n + \frac{\Delta}{D}(1 - \frac{L\alpha}{2h}))(\tau - \tau_o + \alpha\Delta/2h)}{\sigma_1^2/\bar{D}L} \right\}$.

Cette approximation est difficile à justifier à priori, nous verrons qu'elle permet de simplifier considérablement les calculs de résolution.

(b'') La seconde revient à négliger toute dépendance sur l'angle α dans la gaussienne $\exp \left\{ - \frac{(\tau' - \tau_n + \frac{\Delta}{D}(1 - \frac{L\alpha}{2h}))^2}{2\sigma'^2/\bar{D}^2} \right\}$. On peut montrer que la variation avec l'angle α du second moment σ'^2 est suffisamment petite pour que nous puissions ne pas la considérer par la suite. Par contre on peut se poser la question de savoir pourquoi on néglige la dépendance sur l'angle α dans la partie restante de cette gaussienne alors qu'on en tient compte dans la gaussienne

$\exp \left\{ - \frac{(\tau - \tau_o + \frac{\Delta}{2h}\alpha)^2}{2\sigma_1^2/L^2} \right\}$. Pour répondre à la question il faut comparer les termes

$\left(\tau' - \tau_n + \frac{\Delta}{D} \left(1 - \frac{L}{2h} \alpha\right)\right)$ et $\left(\tau - \tau_o + \frac{\Delta}{2h} \alpha\right)$ qui figurent dans les deux gaussiennes. Les quantités $\Delta \left(1 - \frac{L}{2h} \alpha\right)$ et $\frac{L\Delta}{2h} \alpha$ représentent :

(i'') la première le temps pour lequel la transmission du sélecteur mécanique est maximum pour les neutrons se propageant suivant la direction (α) , ceci compte tenu de notre convention sur l'origine des temps.

(ii'') La seconde la variation du déphasage Φ entre les deux disques du sélecteur due à l'angle α .

Pour peu que la distance $\bar{D}$ en temps de vol soit suffisamment grande l'influence de la valeur de l'angle α est plus prononcée sur l'expression $\left(\tau_n - \frac{\Delta}{D} \left(1 - \frac{L}{2h} \alpha\right)\right)$ que sur l'expression $\left(\tau_o - \frac{\Delta}{2h} \alpha\right)$. Avec le choix des paramètres expérimentaux il en est à peu près ainsi dans nos mesures.

Avec ces deux approximations (a'') et (b'') la séparation suivant les variables τ et τ' peut être réalisée dans l'intégrale (II.7) (sauf en ce qui concerne la probabilité de transition P) et cela donne une nouvelle expression de l'intensité $I(\bar{\theta}_s, n)$:

$$I(\bar{\theta}_s, n) \approx \iiint d\alpha d\tau d\tau' e^{-\frac{\alpha^2}{2\eta_M^2}} e^{-\frac{(\tau - \tau_o + \frac{\Delta}{2h}\alpha)^2}{2\sigma_1^2/L^2}} P(\tau - \tau', \alpha, \bar{\theta}_s) e^{-\frac{(\tau' - \tau_n)^2}{2\sigma'^2/\bar{D}^2}} + F \quad (II.8)$$

Dans l'intégrale écrite sous cette forme :

(a''') le terme $e^{-\frac{\alpha^2}{2\eta_M^2}} e^{-\frac{(\tau - \tau_o + \frac{\Delta}{2h}\alpha)^2}{2\sigma_1^2/L^2}}$ apparait comme une fonction transmission du sélecteur mécanique.

(b''') le terme $e^{-\frac{(\tau' - \tau_n)^2}{2\sigma'^2/\bar{D}^2}}$ apparait comme la probabilité que le canal (n) de l'analyseur compte les neutrons diffusés de temps de vol τ' .

L'expression de l'intégrale traduit bien le cheminement des neutrons tout d'abord à travers le sélecteur mécanique, ensuite à travers l'échantillon qui les diffuse inélastiquement suivant une certaine direction et enfin leur arrivée dans l'analyseur multicanaux.

Seule l'expérience permet de savoir si les approximations (a'), (b'), (a'') et (b'') sont bonnes ou mauvaises.

C - MESURE DE LA RESOLUTION

S'il n'existe aucun processus de diffusion la probabilité de transition $P(\tau \rightarrow \tau', \alpha, \bar{\theta}_s)$ s'écrit simplement sous la forme d'une fonction de Dirac $\delta(\tau - \tau')$ et nous pouvons alors à partir de l'observation du spectre sur l'analyseur multicanaux vérifier le bien fondé des diverses approximations faites. Nous avons pour l'équation du spectre :

$$I_o(n) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2\eta_M^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-\frac{(\tau - \tau_o + \alpha\Delta/2h)^2}{2\sigma_1^2/L^2}} e^{-\frac{(\tau - \tau_n)^2}{2\sigma'^2/D^2}} .$$

Cette intégrale s'écrit encore :

$$I_o(n) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-\frac{(\alpha - \alpha_\tau)^2}{2(\Delta\alpha)^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-\frac{(\tau - \tau_o)^2}{2[\sigma_1^2/L^2 + \eta_M^2(\frac{\Delta}{2h})^2]}} e^{-\frac{(\tau - \tau_n)^2}{2\sigma'^2/D^2}} . \quad (II.9)$$

où : (i) $\alpha_\tau = -\left(\frac{\Delta}{2h}\right) \frac{\eta_M^2}{\sigma_1^2/L^2 + \eta_M^2(\Delta/2h)^2} (\tau - \tau_o)$

(ii) $(\Delta\alpha)^2 = \frac{\sigma_1^2/L^2 \eta_M^2}{\sigma_1^2/L^2 + \eta_M^2(\Delta/2h)^2} .$

L'intégration est immédiate et conduit à la relation :

$$I_o(n) \approx e^{-\frac{(\tau_n - \tau_o)^2}{2[\sigma_1^2/L^2 + \eta_M^2(\Delta/2h)^2]}}$$

où nous avons tenu compte du fait que :

$$\frac{\sigma'^2}{D^2} < 0,02 \frac{\sigma_1^2}{L^2} . \quad (II.10)$$

Par ailleurs à partir de l'intégrale (II.8) on peut calculer le nombre de neutrons transmis par le sélecteur mécanique suivant une direction (α) et qui sont comptés dans le canal (n) de l'analyseur. Nous obtenons :

$$i_o(\alpha, n) \approx e^{-\frac{\alpha^2}{2\eta_M^2}} e^{-\frac{(\tau_n - \tau_o + \alpha\Delta/2h)^2}{2\sigma_1^2/L^2}} \quad (II.11)$$

où nous avons encore tenu compte de (II.10).

En effectuant la transformation temps de vol - numéro de canal correspondant nous écrivons les expressions (II.9) et (II.11) sous les formes suivantes :

$$I_o(n) \approx e^{-\frac{(n-n_o)^2}{2\mu^2}} \quad (II.12)$$

$$i_o(\alpha, n) \approx e^{-\frac{\alpha^2}{2\eta_M^2}} e^{-\frac{(n-n_o(\alpha))^2}{2\nu^2}}$$

où : (i) $\mu^2 = \frac{\bar{D}^2}{\delta^2} \left(\frac{\sigma_1^2}{L^2} + \eta_M^2 \left(\frac{\Delta}{2h} \right)^2 \right)$

(ii) $\nu = \frac{\bar{D}}{\delta} \frac{\sigma_1}{L}$ (II.13)

(iii) $n_o(\alpha) = n_o - \frac{\bar{D}}{\delta} \left(\frac{\Delta}{2h} \right) \alpha$ (II.14)

n_o est le canal de l'analyseur correspondant au temps de vol moyen τ_o des neutrons dans chaque pulse issu du sélecteur mécanique.

Posons :

$$a' \equiv \frac{\bar{D}}{\delta} \left(\frac{\Delta}{2h} \right) \quad (II.15)$$

Alors nous avons la relation suivante entre les moments d'ordre 2μ et ν :

$$\mu^2 = \nu^2 + a'^2 \eta_M^2 \quad (II.16)$$

Afin d'étudier la distribution des neutrons transmis à chaque angle α nous avons disposé devant le compteur une fente verticale de largeur égale à 3,05 mm pratiquée dans une plaque de cadmium. L'axe de rotation du compteur passe par l'échantillon qui est placé à 5 m de celui-ci, aussi l'échantillon voit-il la partie visible du compteur sous un angle horizontal apparent égal à 2'. En conséquence nous effectuons la rotation du compteur par pas de 2'. A chaque position angulaire α du compteur l'analyseur multicanaux enregistre le spectre $i_o(\alpha, n)$ et en fonction de l'angle α nous observons un déplacement linéaire de la position du maximum tel que le prédit la formule (II.14) (cf. figure (12)). De plus tous les moments d'ordre deux des spectres observés ne présentent aucune variation systématique avec l'angle α , ce qui est en accord avec l'expression

calculée (II.13) de ν et justifie par la même occasion la condition $\frac{\sigma_1^2}{D^2} \ll \frac{\sigma_1^2}{L^2}$ (cf. figure (13)). Dans le tableau ci-dessous nous avons rassemblé les valeurs des paramètres a' et ν^2 qui sont d'une part calculées à partir des formules et d'autre part déterminées expérimentalement.

	valeur calculée (approx.)	valeur expérimentale
a'	1,265 canal/minute	1,058 canal/minute
ν^2	51,85	62,2

Comme les valeurs calculées sont plutôt des estimations, l'accord avec les valeurs expérimentales peut être considéré comme bon.

L'analyseur enregistre aussi la somme de tous les spectres $i_o(\alpha, n)$ qui n'est rien d'autre que $I_o(n)$ et la valeur expérimentale du second moment μ^2 est égale à $86,5 \text{ (canaux)}^2$.

Nous avons ici mesuré la distribution angulaire des neutrons transmis par le sélecteur mécanique et nous trouvons pour la valeur du second moment η_M^2 une valeur expérimentale égale à $21,4 \text{ (minute)}^2$ alors que l'estimation effectuée à partir des formules (II.3) et (II.5) donne : $\eta_M^2 = 29,9 \text{ (minute)}^2$.

Il est possible de vérifier si les différentes valeurs du second moment μ^2 sont sinon égales, du moins très comparables :

(a) La valeur expérimentale obtenue d'après le spectre $I_o(n)$ est :

$$\mu^2 = 86,5 \text{ (canaux)}^2 .$$

(b) La valeur qu'on peut calculer d'après la relation (II.16) en utilisant les valeurs expérimentales de ν^2 , η_M^2 et a' , est :

$$\mu^2 = 86,2 \text{ (canaux)}^2$$

(c) La valeur qu'on peut déduire de la relation (II.16) en utilisant les estimations de ν^2 , η_M^2 et a' calculées à partir des formules (II.13), (II.3), (II.5) et (II.15), est :

$$\mu^2 = 99,8 \text{ (canaux)}^2 .$$

Les deux premières valeurs sont pratiquement égales et comparables à la troisième qui n'est qu'une estimation. Ce résultat prouve qu'en ce qui concerne les valeurs des quantités ν , η_M et a' , les approximations faites ne sont pas mauvaises.

L'accord entre les formes expérimentales et théoriques des spectres est beaucoup moins probant. Nous pensons que la raison en est, d'une part, dans les approximations faites et d'autre part dans le fait d'avoir négligé l'efficacité du compteur.

Cependant, à ce sujet, il faut noter que dans la méthode utilisée les neutrons quel que soit l'angle α traversent toujours la même partie du compteur, d'où la suppression des corrections éventuelles relatives à la géométrie du compteur.

- Le spectre expérimental $I_0(n)$ est légèrement dissymétrique, cela peut être dû :

(a') soit au fait d'avoir négligé l'efficacité

(b') soit de ne pas avoir tenu compte de la variation de l'exponentielle

$\exp \left\{ - \frac{\overline{DL}}{2\sigma_1} (\tau' - \tau_n)(\tau - \tau_0 + \alpha\Delta/2h) \right\}$, terme qui "couple" en quelque sorte les contributions du sélecteur mécanique et de l'analyseur et dont la présence dans l'intégrale (II.7) empêche tout calcul dans la mesure où on ne peut plus séparer dans la résolution une partie caractéristique du sélecteur mécanique et une partie caractéristique de l'analyseur.

Nous verrons plus loin qu'on peut tenir compte de la dissymétrie du spectre $I_0(n)$ en remplaçant l'expression théorique (II.12) qui est une simple gaussienne par un développement du type :

$$I_0(n) = e^{-\frac{(n-n_0)^2}{2\mu^2}} \sum_{j=0}^{j=8} B_j H_j \left(\frac{n-n_0}{\mu} \right)$$

où H_j est le polynôme d'Hermite de degré j .

III - METHODE D'ANALYSE DES SPECTRES OBSERVES

L'expression (II.8) semble donc, à la suite des mesures portant sur le faisceau direct, être une bonne formule de départ pour décrire le spectre effectivement observé sur l'analyseur multicanaux. La probabilité de transition $P(r \rightarrow r', \alpha, \bar{\theta}_s)$ est, en d'autres termes, la section efficace de diffusion des neutrons $\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}$. Il est nécessaire de connaître l'expression de la section efficace, la résolution instrumentale étant connue par une mesure directe par l'analyseur du faisceau de neutrons transmis par le sélecteur. L'expression choisie de la section efficace magnétique est celle de L. Van Hove (cf. (I.54)) :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} \propto \frac{k'}{k} \frac{1}{r_1^2 (K_1^2 + q^2)} \frac{\Lambda q^2}{\omega + (\Lambda q^2)^2}$$

expression valable en toute rigueur dans la région hydrodynamique supérieure (région III...) dans le cas où la susceptibilité χ_q^0 a la forme asymptotique de Ornstein-Zernike (I.49). Les vecteurs d'onde $\vec{k}$ et $\vec{k}'$, le vecteur de diffusion $\vec{q}$ et le changement d'énergie $\hbar\omega$ des neutrons en cours de diffusion s'expriment en fonction de l'inverse des temps de vol τ et τ' alors que la résolution s'exprime à l'aide du produit de deux gaussiennes en fonction de ces mêmes temps de vol. La question qui se pose est de savoir dans quelle mesure si on effectue le passage des temps de vol τ aux énergies E , les expressions gaussiennes des fonctions transmission du sélecteur et de probabilité de comptage de l'analyseur sont conservées. Si cette conservation est effective l'allègement des calculs ultérieurs est considérable.

A - CONVERSION TEMPS DE VOL - ENERGIE

Cette conversion intéresse, comme nous l'avons déjà dit, la résolution instrumentale. En fonction du temps de vol τ l'énergie E du neutron s'écrit :

$$E = \frac{m}{2} \frac{1}{\tau^2} .$$

Nous allons tout d'abord considérer le cas de la fonction transmission du sélecteur mécanique (cf. la relation (II.9)) :

$$\mathcal{T}_{SM}(\alpha, \tau) = e^{-\frac{(\alpha - \alpha_\tau)^2}{2(\Delta\alpha)^2}} = e^{-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2[\sigma_1^2/L^2 + \eta_M^2(\frac{\Delta}{2h})^2]}}$$

Sur la figure (14), nous avons tracé la variation de l'énergie E en fonction du temps de vol τ . Au point de coordonnées (τ_0, E_0) traçons la tangente à la courbe $E(\tau)$, son équation s'écrit :

$$\tilde{E}(\tau) = E_0 + (\tau - \tau_0) \left. \frac{dE}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0}$$

$$\text{et : } \tilde{E}(\tau) - E_0 = -\frac{m}{3} \frac{(\tau - \tau_0)}{\tau_0}.$$

Est-il justifié de remplacer la différence $(\tilde{E}(\tau) - E_0)$ par la différence $(E - E_0)$? où en d'autres termes l'approximation linéaire est-elle valable ? Afin de répondre à la question calculons l'écart relatif :

$$\frac{(\tilde{E}(\tau) - E_0) - (E - E_0)}{E - E_0},$$

$$\text{il est égal à : } \frac{(\tilde{E}(\tau) - E_0) - (E - E_0)}{E - E_0} = \frac{2\tau^2}{\tau_0(\tau + \tau_0)} - 1 ;$$

on voit qu'il est d'autant plus faible que le temps de vol τ est voisin de τ_0 .

Evaluons cet écart relatif pour une valeur du rapport $\frac{\tau - \tau_0}{\tau_0}$ égal à 4,5 % (ce qui correspond environ à 30 canaux sur l'analyseur). La valeur de l'écart est égale à 8 %. Cette dernière valeur, relativement élevée, représente l'erreur commise quand on remplace dans la gaussienne $\mathcal{T}_{SM}(\alpha, \tau)$ la différence en temps de vol $(\tau - \tau_0)$ par la différence en énergie $(E - E_0)$. Cependant compte tenu de la valeur du second moment μ égal sensiblement à 10 canaux, on voit que pour la valeur du rapport $\frac{\tau - \tau_0}{\tau_0}$ choisie la fonction transmission $\mathcal{T}_{SM}(\alpha, \tau)$ s'annule pratiquement, en effet la valeur qu'elle prend est égale à 0,6 % de sa valeur pour $\tau = \tau_0$ et l'approximation linéaire peut donc s'appliquer puisqu'aux valeurs de τ où elle devient caduque la fonction transmission est quasiment nulle. En d'autres mots cela revient à dire que la contribution des "ailes" de la gaussienne en énergie sera négligeable dans le calcul de l'intégrale (II.8). En fonction de l'énergie la fonction transmission $\mathcal{T}_{SM}(\alpha, \tau)$ s'écrit :

$$\mathcal{T}_{SM}(\alpha, \tau) \approx e^{-\frac{(\alpha - \alpha_E)^2}{2(\Delta\alpha)^2}} e^{-\frac{(E - E_0)^2}{2[(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]}} = \mathcal{T}_{SM}(\alpha, E)$$

où : (i) $a = a' \times \frac{\delta}{D} \times \frac{m}{3\tau_0}$

(ii) $(\Delta E) = \frac{\sigma_1}{L} \times \frac{m}{3\tau_0}$

(iii) $(\Delta\alpha)^2 = \frac{a^2 \eta_M^2}{(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2}$

(iv) $\alpha_E = \alpha_\tau = \frac{a \eta_M^2}{(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2} (E - E_0)$.

- Si l'approximation linéaire se justifie pour la fonction transmission du sélecteur mécanique elle se justifie encore mieux pour ce qui est de la fonction probabilité de comptage dans le canal n de l'analyseur :

$$P_n(\tau') = e^{-\frac{(\tau' - \tau_n)^2}{2\sigma'^2 / D^2}}$$

Si ϵ_n est l'énergie correspondant au milieu du canal (n), l'équation de la tangente à la courbe $E(\tau)$ au point de coordonnées (τ_n, ϵ_n) s'écrit :

$$\tilde{E}(\tau') = \epsilon_n - \frac{m}{3\tau_n} (\tau' - \tau_n)$$

et la valeur de l'écart relatif $\left\{ \frac{(E(\tau') - \epsilon_n) - (E' - \epsilon_n)}{(E' - \epsilon_n)} \right\}$ est égale à $\left\{ \frac{2\tau'^2}{\tau_n(\tau' + \tau_n)} - 1 \right\}$.

Etant donné "l'étroitesse" de la gaussienne $P_n(\tau')$ une variation très petite de τ' par rapport à τ_n l'annule et en conséquence on peut remplacer la différence en temps de vol $(\tau' - \tau_n)$ dans $P_n(\tau')$ par la différence en énergie $(E' - \epsilon_n)$:

$$P_n(\tau') \approx e^{-\frac{(E' - \epsilon_n)^2}{2(\Delta\epsilon_n)^2}}$$

où le second moment en énergie $(\Delta\epsilon_n)^2$ s'écrit :

$$(\Delta\epsilon_n)^2 \equiv \left(\frac{m}{3} \frac{\sigma'}{D} \right)^2 \cdot$$

Nous verrions là surgir un inconvénient grave si la gaussienne P_n n'était pas justement étroite comparée à la gaussienne $\mathcal{T}_{SM}$. En effet la valeur du second moment $(\Delta\epsilon_n)^2$ dépend du choix du numéro n de canal de l'analyseur. Cette valeur si elle varie d'un facteur 5 sur toute la zone d'exploration de l'analyseur, reste dans tous les cas petite comparée à celle de $(\Delta E)^2$ (au pire elle représente 10 % de celle-ci). Aussi décidons-nous de faire l'approximation que $(\Delta\epsilon_n)^2$ est indépendant de n et qu'il est donné par la formule :

$$(\Delta\epsilon_n)^2 \approx (\Delta\epsilon)^2 = \left(\frac{m}{3} \frac{\sigma'}{D} \right)^2 \cdot$$

La fonction probabilité s'écrit donc finalement :

$$P_n(\tau') \approx e^{-\frac{(E' - \epsilon_n)^2}{2(\Delta\epsilon)^2}} = P_n(E') \quad (II.17)$$

B - CONSIDERATIONS PRELIMINAIRES

Les approximations linéaires permettant d'exprimer la résolution en fonction de l'énergie tout en conservant les expressions obtenues avec le temps de vol, nous simplifient la tâche mais il reste un certain nombre d'obstacles dont l'un, essentiel, est le calcul de l'intégrale triple :

$$\bar{I}(\theta_s, n) = \iiint d\alpha dE dE' \mathcal{T}_{SM}(\alpha, E) \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} P_n(E') + F \quad (II.18)$$

Notre souci va donc être de ramener cette intégrale triple à une intégrale simple suivant le transfert d'énergie $\hbar\omega = E - E'$ qui se prête à une analyse numérique sur ordinateur.

C - INTEGRATION SUR L'ANGLE α

L'intégration sur l'angle d'incidence α est, de loin, l'étape du calcul la plus délicate. Avant toute chose réécrivons l'expression de la fonction transmission du sélecteur mécanique :

$$\mathcal{T}_{SM}(\alpha, E) = e^{-\frac{(\alpha - \alpha_E)^2}{2(\Delta\alpha)^2}} e^{-\frac{(E - E_O)^2}{2[(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]}} \quad (II.19)$$

Les mesures faites sur le faisceau direct donnent pour $(\Delta\alpha)$ et $\left\{(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2\right\}^{1/2}$ les valeurs suivantes :

$$(a) \quad (\Delta\alpha) = 4'$$

$$(b) \quad \sqrt{(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2} = 0,13 \text{ meV}.$$

A ce premier stade du calcul l'énergie incidente E et le transfert d'énergie $\hbar\omega$ sont constants. L'expression (II.19) de la fonction $\mathcal{T}_{SM}(\alpha, E)$ signifie que pour une énergie incidente donnée E , les neutrons incidents se propagent préférentiellement suivant une direction qui fait l'angle α_E avec l'axe du faisceau incident. Une courbe d'énergie constante dans le plan du schéma de diffusion (figure (15)) est un arc de cercle centré au point O qui repère l'emplacement de l'échantillon. Comme l'angle de diffusion moyen $\bar{\theta}_s$ reste toujours petit (la valeur ne dépasse jamais 5°), on assimile cet arc de cercle à sa tangente (Δ) au point F d'intersection avec l'axe du faisceau incident OA . La direction de propagation préférentielle des neutrons d'énergie E coupe (Δ) au point O' et le lieu géométrique de ce point dans le plan du schéma de diffusion quand on fait varier l'énergie incidente E est une certaine courbe passant par le point A qui repère l'extrémité du vecteur d'onde moyen $\vec{k}_O (\equiv \vec{OA})$ des pulses de neutrons et dont l'équation est donnée par l'expression :

$$\alpha_E = \frac{a \eta_M^2}{(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2} (E - E_O) \quad .$$

Compte tenu de ce que la gaussienne $\exp \left\{ -\frac{(E - E_O)^2}{2[(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]} \right\}$ qui figure dans

l'expression (II.18) de la fonction transmission est relativement "étroite", le point O' correspondant à un flux incident de neutrons d'énergie la plus probable E arrivant sur l'échantillon qui reste raisonnable, ne s'écarte jamais beaucoup du point A qui lui correspond au flux de neutrons d'énergie la plus probable E_0 . Nous pourrions confondre la courbe décrite par le point O' avec sa tangente (Ψ) au point A . L'angle ψ d'inclinaison de la droite (Ψ) est donnée par la formule :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2a\eta_M^2}{a^2\eta_M^2 + (\Delta E)^2} E_0 \quad .$$

Dans les expériences l'énergie moyenne E_0 est égale à 4,66 MeV ($\lambda_0 = 4,19 \text{ \AA}$) et en utilisant les valeurs expérimentales des quantités a , η_M^2 et $(\Delta E)^2$ nous aboutissons à la valeur suivante de l'angle ψ :

$$\psi = 2^{\circ}47' \quad .$$

Ainsi pour chaque énergie E , il est facile de construire la direction de propagation préférentielle des neutrons incidents. L'énergie E détermine la position de la droite (Δ) et l'intersection de celle-ci avec la droite (Ψ) est le point O' ; la droite OO' est la direction préférentielle cherchée.

De l'intégrale multiple (II.18) extrayons l'intégrale simple suivante :

$$I(E, E') = \int d\alpha \exp \left\{ - \frac{(\alpha - \alpha_E)^2}{2(\Delta\alpha)^2} \right\} \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}$$

que nous nous proposons de résoudre. Soit H' le point sur la direction commune des neutrons diffusés correspondant à l'énergie E' , les vecteurs $\overrightarrow{PH'}$ et $\overrightarrow{O'H'}$ représentent respectivement le vecteur de diffusion $\vec{q}$ relatif aux neutrons incidents d'énergie E qui atteignent l'échantillon sous l'angle α et le vecteur de diffusion le plus probable $\vec{q}_{E, E'}$. Pour calculer l'intégrale $I(E, E')$ introduisons :

(a) la variable réduite :

$$u = \frac{k}{q_{E, E'}} (\alpha - \alpha_E)$$

(b) les paramètres sans dimensions :

$$(II.20) \quad x = \frac{K_1}{q_{E,E'}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\omega}{\Lambda q_{E,E'}} \quad (II.21)$$

La droite (Δ) coupe la direction des neutrons diffusés au point H et le vecteur $\overrightarrow{O'H}$ représente le vecteur de diffusion $\vec{q}_{E,E}$ correspondant au processus de diffusion élastique. Si φ est l'angle que font entre eux les vecteurs $\overrightarrow{O'H}$ et $\overrightarrow{O'H'}$ le carré du module du vecteur de diffusion $\vec{q}$ s'écrit :

$$q^2 = q_{E,E'}^2 \left[\sin^2 \varphi + (u - \cos \varphi)^2 \right]$$

L'intégrale $I(E,E')$ se met alors facilement sous la forme du produit de convolution suivant :

$$I(E,E') = \text{Cte} \times \frac{k'}{k} \cdot \frac{q_{E,E'}}{k} \cdot \frac{1}{\Lambda q_{E,E'}^4} \cdot \frac{1}{r_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-u^2/2\rho^2} F_\varphi(u - \cos \varphi),$$

{ L'intégration s'effectue en quelque sorte le long de la droite (Δ) }

où : (a') $\rho = \frac{k}{q_{E,E'}} (\Delta \alpha)$

$$(b') \quad F_\varphi(u) = \frac{1}{(x^2 + \sin^2 \varphi) + u^2} \cdot \frac{u^2 + \sin^2 \varphi}{y^2 + (\sin^2 \varphi + u^2)^2}$$

Dans la mesure où la gaussienne $e^{-u^2/2\rho^2}$ est suffisamment "étroite" pour que dans l'intervalle où elle varie beaucoup, la fonction $F_\varphi(u)$, par contre ne varie guère, on peut écrire le produit de convolution sous la forme approchée :

$$I(E,E') \simeq \text{Cte} \times \frac{k'}{k} \cdot \frac{q_{E,E'}}{k} \cdot \frac{1}{\Lambda q_{E,E'}^4} \cdot \frac{1}{r_1^2} \rho \sqrt{2\pi} F_\varphi(-\cos \varphi) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{F''_\varphi(u)}{F_\varphi(u)} \right\}_{u=-\cos \varphi}$$

Notre approximation ne se justifie que si la quantité $\rho^2 \times \frac{1}{2} \frac{F''_\varphi(u)}{F_\varphi(u)} \Big|_{u=-\cos \varphi}$ reste dans tous les cas petite devant l'unité. Il nous faut donc évaluer le rapport

$$\frac{1}{2} \frac{F''_\varphi(u)}{F_\varphi(u)} \Big|_{u=-\cos \varphi} \quad \text{qui est une fonction de l'angle } \varphi :$$

$$\frac{1}{2} \frac{F''_\varphi(u)}{F_\varphi(u)} \Big|_{u=-\cos \varphi} = G(\varphi)$$

Grâce aux relations trigonométriques du triangle (O'HH') nous pouvons exprimer $q_{E,E'}$ et les paramètres sans dimensions x et y en fonction des angles $\bar{\theta}_s$ et φ et du module du vecteur de diffusion $\vec{q}_{E,E}$ correspondant au processus de diffusion élastique le plus probable :

$$q_{E,E'} = q_{E,E} \frac{1}{\cos\varphi} \frac{1}{1 - \text{tg}\bar{\theta}_s \text{tg}\varphi}$$

et compte tenu des expressions (II.20) et (II.21) :

$$x = \frac{K_1}{q_{E,E}} \cos\varphi (1 - \text{tg}\bar{\theta}_s \text{tg}\varphi)$$

$$y = \left\{ \frac{\hbar}{2m\Lambda} \right\} \frac{1}{\cos\bar{\theta}_s} \sin\varphi \cos\varphi (1 - \text{tg}\bar{\theta}_s \text{tg}\varphi) \left[\frac{2k}{q_{E,E}} + \frac{1}{\cos\bar{\theta}_s} \frac{\text{tg}\varphi}{1 - \text{tg}\bar{\theta}_s \text{tg}\varphi} \right] .$$

Sachant d'une part que l'angle de diffusion $\bar{\theta}_s$ reste toujours petit dans nos expériences et d'autre part que le processus de diffusion critique est quasi-élastique, il est raisonnable de supposer que l'angle φ qui exprime l'inélasticité du processus vérifie la condition :

$$\text{tg}\varphi \ll \frac{1}{\text{tg}\bar{\theta}_s} .$$

Cette condition est d'autant mieux satisfaite que l'angle $\bar{\theta}_s$ est plus petit. Nous pouvons simplifier les expressions de x et y quand l'angle $\bar{\theta}_s$ est petit :

$$x \approx \frac{K_1}{q_{E,E}} \cos\varphi$$

$$y \approx \frac{\hbar}{m\Lambda} \frac{1}{\bar{\theta}_s} \sin\varphi \cos\varphi .$$

On montre alors que la fonction $G(\varphi)$ est une fonction paire de l'angle φ et en procédant à un développement limité de cette fonction au voisinage de la valeur $\varphi = 0$ il apparaît que $G(0)$ est un maximum :

$$G(0) = \frac{3x_o^4 + 9x_o^2 + 10}{(x_o^2 + 1)^2}$$

où $x_o \equiv K_1/q_{E,E} = x_o(E)$.

Dans le cas d'un processus de diffusion quasi-élastique l'angle φ est faible et le rapport $\frac{1}{2} \frac{F''(u)}{F_\varphi(u)} \Big|_{u=-\cos\varphi}$ tend à avoir une valeur maximum effectivement atteinte pour la valeur $\varphi = 0$.

La condition $q_{E,E} \leq q_{E,E'}$ étant toujours satisfaite le paramètre ρ atteint une valeur maximum $\rho_{e\ell}$ quand le processus de diffusion est élastique ($E'=E$):

$$\rho_{e\ell} = \frac{k(\Delta\alpha)}{q_{E,E}} .$$

Etant donné l'inclinaison de la droite (Ψ) par rapport à l'axe incident (figure(15)) la valeur de $\rho_{e\ell}$ sera d'autant plus élevée que l'énergie incidente E sera plus grande. Considérons donc le cas où $E > E_0$, nous savons déjà que le point O' reste néanmoins pas trop éloigné de A . Pour fixer les idées prenons l'exemple où $E-E_0 = + 0,08 E_0$, alors l'intensité incidente correspondante au point O' ne représente plus que 2 % de celle correspondante au point A . Evaluons dans ces conditions le module du vecteur $\vec{q}_{E,E}$:

$$q_{E,E} = q_0 \left[1 + \frac{k-k_0}{k_0} \left(1 - \frac{\psi}{\bar{\theta}_s} \right) \right]$$

où $q_0 \equiv q_{E_0,E_0} = k_0 \bar{\theta}_s$ est le module du vecteur de diffusion moyen $\vec{q}_0$. Le plus petit angle de diffusion $\bar{\theta}_s$ est égal à $30'$ et en utilisant la valeur expérimentalement trouvée pour l'angle ψ nous trouvons une valeur du module $q_{E,E}$ égale à :

$$q_{E,E} \approx 0,82 q_0$$

$$\text{et} \quad \rho_{e\ell} \approx \frac{0,96 k_0}{0,82 q_0} (\Delta\alpha) = \frac{96}{82} \frac{(\Delta\alpha)}{\bar{\theta}_s}$$

avec la valeur expérimentale de $(\Delta\alpha)$ nous aboutissons à la valeur :

$$\rho_{e\ell} \approx 0,16 ,$$

si le domaine d'investigation des neutrons est celui pour lequel nous avons sensiblement $x_0 \approx 1$, ou encore $q_{E,E} \approx K_1$.

La valeur du maximum $G(0)$ est alors égale à 5,5. La valeur de la quantité $\frac{1}{2} \rho^2 \frac{F''(u)}{F_\varphi(u)} \Big|_{u=-\cos\varphi}$ reste inférieure à 0,14 ; cette valeur n'est pas négligeable devant l'unité mais outre que nous avons considéré un cas extrême ($\bar{\theta}_s = 30'$), elle correspond à une énergie incidente E pour laquelle l'intensité des neutrons est faible (à peine 2 % de l'intensité des neutrons d'énergie E_0). Compte tenu de ces remarques nous faisons l'approximation qui consiste à négliger le terme $\frac{1}{2} \rho^2 \frac{F''(u)}{F_\varphi(u)} \Big|_{u=-\cos\varphi}$ devant l'unité.

D - INTEGRATION SUR L'ENERGIE INCIDENTE

L'intégrale $I(E, E')$ s'écrit donc :

$$I(E, E') \approx \text{Cte} \times (\Delta\alpha) \sqrt{2\pi} \sigma(q_{E, E'}^2, \omega) \quad (\text{II.22})$$

où nous avons écrit l'expression de L. Van Hove sous la forme :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} \equiv \sigma(q^2, \omega)$$

L'étape suivante du calcul consiste à effectuer l'intégration sur l'énergie incidente E . Cette intégration se traduit graphiquement sur la figure 14 par un déplacement de la droite (Δ) parallèlement à elle-même et par conséquent par un déplacement du point O' , origine du vecteur de diffusion $\vec{q}_{E, E'}$, sur la droite (Ψ) . Nous savons qu'une expression approchée de la probabilité que le canal (n) de l'analyseur a de compter les neutrons diffusés d'énergie E' est la gaussienne (II.17). Le nombre de neutrons $I(\bar{\theta}_s, n)$ s'écrit à présent :

$$I(\bar{\theta}_s, n) \approx \int dE' \int dE \exp \left\{ - \frac{(E-E_0)^2}{2 [(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]} \right\} I(E, E') P_n(E') + F$$

où $I(E, E')$ est donné par l'expression (II.22). Ce nombre nous pouvons l'écrire encore sous la forme :

$$I(\bar{\theta}_s, n) \approx \text{Cte} (\Delta\alpha) \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dE e^{-\frac{(E-E_0)^2}{2 [(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]}} \sigma [q_{E, E-\omega}^2, \omega] e^{-\frac{(E-\omega-\epsilon_n)^2}{2 (\Delta\epsilon)^2}} + F$$

nous appliquons la convention $\hbar = 1$ et nous avons fait un changement de variable entre E' et ω . Procédons au calcul de l'intégrale :

$$J_n(\omega) = \int_0^\infty dE e^{-\frac{(E-E_0)^2}{2[(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]}} e^{-\frac{(E-\omega-\epsilon_n)^2}{2(\Delta E)^2}} \sigma(q_{E,E-\omega}^2, \omega) \quad (II.23)$$

Dans la mesure où nous avons supposé que le rapport $\frac{(\Delta E)^2}{(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2}$ a une valeur petite devant l'unité cette dernière intégrale s'écrit :

$$J_n(\omega) \approx e^{-\frac{E_0^2}{2[(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]}} e^{-\frac{(E_0 - \epsilon_n - \omega)^2}{2[(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]}} \int_0^\infty dE e^{-\frac{(E - \epsilon_n - \omega)^2}{2(\Delta E)^2}} \sigma(q_{E,E-\omega}^2, \omega)$$

Dans l'intégrale de l'expression ci-dessus le module du vecteur de diffusion $\vec{q}_{E,E-\omega}$ est donné par la relation :

$$q_{E,E-\omega}^2 \approx q_0^2 \left\{ \left[1 + \frac{k-k_0}{k_0} \left(1 - \frac{\psi}{\theta_s} \right) \right]^2 + \frac{(k'-k)^2}{q_0^2} + 2 \frac{k'-k}{k_0} \left[1 + \frac{k-k_0}{k_0} \left(1 - \frac{\psi}{\theta_s} \right) \right] \right\} \quad (II.24)$$

où rappelons-le $\vec{q}_0 \equiv \vec{k}_0 - \vec{\theta}_s$ est le vecteur de diffusion correspondant au processus élastique pour l'énergie incidente E_0 . La relation (II.23) est obtenue facilement en considérant le triangle (O'HH') du schéma de la figure (15) dans lequel on écrit l'égalité vectorielle :

$$\vec{O'H'} = \vec{O'H} + \vec{HH'}$$

qu'on élève ensuite au carré.

Comme le processus est quasi-élastique ($\frac{\omega}{E} \ll 1$) le carré du module du vecteur $\vec{q}_{E,E-\omega}$ s'écrit encore :

$$q_{E,E-\omega}^2 \approx q_0^2 \left\{ \left[1 + \left[\left(\frac{E}{E_0} \right)^{1/2} - 1 \right] \left[1 - \frac{\psi}{\theta_s} \right] \right]^2 + \frac{1}{4\theta_s^2} \frac{\omega^2}{E_0 E} - \frac{\omega}{(E_0 E)^{1/2}} \left[1 + \left[\left(\frac{E}{E_0} \right)^{1/2} - 1 \right] \left[1 - \frac{\psi}{\theta_s} \right] \right] \right\}$$

et le rapport $\frac{k'}{k}$ qui figure dans l'expression (I.48) de L. Van Hove de la section efficace s'écrit simplement :

$$\frac{k'}{k} \approx 1 - \frac{\omega}{2E}$$

Dans le présent calcul rappelons que le transfert d'énergie ω est une constante. On peut écrire la section efficace $\sigma(q_{E,E-\omega}^2, \omega)$ sous la forme :

$$\sigma(q_{E,E-\omega}^2, \omega) = \frac{1}{\Lambda q_0^4} F(v)$$

où :

$$(a) \quad v = \frac{E}{E_0} ; \quad \epsilon = \frac{\omega}{E_0}$$

$$(b) \quad X = X(v) = \frac{q_{E,E-\omega}^2}{q_0^2} = \left[1 + (\sqrt{v} - 1) \left(1 - \frac{\psi}{\theta_s} \right) \right]^2 + \frac{1}{\theta_s^2} \frac{\epsilon^2}{v} - \frac{\epsilon}{\sqrt{v}} \left[1 + (\sqrt{v} - 1) \left(1 - \frac{\psi}{\theta_s} \right) \right]$$

$$(c) \quad F(v) = \left(1 - \frac{\epsilon}{2v} \right) \frac{1}{[x_0(E_0)]^2 + X} \frac{X}{[y_0]^2 + X^2} \quad \text{avec} \quad y_0 = \frac{\omega}{\Lambda q_0^2}$$

L'intégrale figurant dans (II.23) s'écrit encore en fonction de la variable réduite v et des divers paramètres sans dimensions que nous venons d'introduire :

$$\int_0^\infty e^{-\frac{(E-\epsilon_n-\omega)^2}{2(\Delta\epsilon)^2}} \sigma(q_{E,E-\omega}^2, \omega) dE \propto \int_0^\infty e^{-\frac{[v-(v_n+\epsilon)]^2}{2(\Delta v)^2}} F(v) dv$$

Cette dernière intégrale s'écrit encore dans une approximation du 1er ordre :

$$\int_0^\infty dv e^{-\frac{[v-(v_n+\epsilon)]^2}{2(\Delta v)^2}} \left[F(v_n+\epsilon) + [v-(v_n+\epsilon)] F'(v) \Big|_{v=v_n+\epsilon} + \dots \right]$$

$$\text{où :} \quad v_n = \epsilon_n / E_0 \quad \text{et} \quad \Delta v = \Delta\epsilon / E_0$$

Nous trouvons le résultat :

$$(\Delta v) F(v_n+\epsilon) \left[1 + (\Delta v) e^{-\frac{v_n^2}{2(\Delta v)^2}} \frac{F'(v)}{F(v)} \Big|_{v=v_n+\epsilon} \right] \left(\frac{\epsilon}{v_n} \ll 1 \right)$$

Avec nos conditions expérimentales : $(\Delta v) \approx 4 \times 10^{-3}$ et $v_n \approx 1$. Ainsi le produit $(\Delta v) e^{-v_n^2/2(\Delta v)^2}$ est-il quantité pratiquement négligeable. Le rapport $\left. \frac{F'(v)}{F(v)} \right|_{v=v_n+\epsilon}$ quant à lui a une valeur finie de l'ordre de l'unité et finalement l'intégrale de l'expression (II.23) compte tenu de "l'étroitesse" de la gaussienne $\exp \left\{ -\frac{[E-\epsilon_n-\omega]^2}{2(\Delta\epsilon)^2} \right\}$ est égale avec une très bonne approximation à $\sigma(q_{\epsilon_n+\omega, \epsilon_n}^2, \omega)$.

E - INTEGRATION SUR LE CHANGEMENT D'ENERGIE ω

Nous pouvons donc écrire le terme $J_n(\omega)$ sous la forme :

$$J_n(\omega) = \exp \left\{ \frac{E_o^2}{2[(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]} \right\} \exp \left\{ -\frac{[(E_o - \epsilon_n) - \omega]^2}{2[(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]} \right\} \sigma \left[q_{\epsilon_n+\omega, \epsilon_n}^2, \omega \right] .$$

Et le nombre de neutrons $I(\bar{\theta}_s, n)$ prend la forme d'une intégrale simple sur le changement d'énergie ω :

$$I(\bar{\theta}_s, n) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-\frac{[(E_o - \epsilon_n) - \omega]^2}{2[(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]}} \sigma \left[q_{\epsilon_n+\omega, \epsilon_n}^2, \omega \right] + F . \quad (II.25)$$

Dans la section efficace $\sigma \left[q_{\epsilon_n+\omega, \epsilon_n}^2, \omega \right]$ nous avons :

$$(a) \quad \frac{k'}{k} \approx 1 - \frac{\omega}{2(\epsilon_n + \omega)} \approx 1 - \frac{\omega}{2\epsilon_n}$$

$$(b) \quad q_{\epsilon_n+\omega, \epsilon_n}^2 \approx q_o^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{\epsilon_n}{E_o} - 1 + \frac{\omega}{2E_o} \right) \left(1 - \frac{\psi}{\theta_s} \right) \right]^2 + \frac{1}{4\theta_s^2} \frac{\omega^2}{E_o \epsilon_n \left(1 + \frac{\omega}{\epsilon_n} \right)} - \frac{\omega}{E_o^{1/2} \epsilon_n^{1/2} \left(1 + \frac{\omega}{2\epsilon_n} \right)} \right. \\ \left. \left[1 + \left(\frac{\epsilon_n}{E_o} - 1 + \frac{\omega}{2E_o} \right) \left(1 - \frac{\psi}{\theta_s} \right) \right] \right\} .$$

Il nous faut encore simplifier l'intégrale simple (II.25) pour qu'elle puisse apparaître comme un produit de convolution. Cette approximation est rendue nécessaire par les méthodes d'analyse numérique sur ordinateur que nous avons utilisées, de plus elle se justifie en remarquant que le module du vecteur $\vec{q}_{\epsilon_n + \omega, \epsilon_n}$ dépend peu du numéro de canal (n) choisi :

L'énergie moyenne E_0 correspond au canal n_0 , c'est-à-dire que nous avons l'identité $E_0 \equiv \epsilon_{n_0}$. En figure (16) nous avons tracé les variations du module $q_{\epsilon_n + \omega, \epsilon_n}$ en fonction du changement d'énergie ω pour l'énergie ϵ_n correspondant aux trois valeurs suivantes de la différence $(n - n_0)$:

$$n - n_0 = - 20 \quad \text{canaux}$$

$$n - n_0 = 0$$

$$n - n_0 = + 20 \quad \text{canaux} \quad .$$

Les plus grandes différences dans la valeur du module se produisent au voisinage de la valeur $\omega = 0$. Et encore l'écart ne dépasse-t-il pas 8 % . Dans l'intégrale nous supposons en conséquence que le module $q_{\epsilon_n + \omega, \epsilon_n}$ reste égal à $q_{\epsilon_{n_0} + \omega, \epsilon_{n_0}}$ que nous écrivons $q_0^*(\omega)$:

$$q_0^*(\omega) = q_{\epsilon_{n_0} + \omega, \epsilon_{n_0}} = q_{E_0 + \omega, E_0}$$

$$q_0^*(\omega)^2 / q_0^2 \approx \left[1 + \frac{\omega}{2E_0} \left(1 - \frac{\psi}{\theta_s} \right) \right]^2 + \frac{1}{\theta_s^2} \frac{\omega^2}{(2E_0)^2} - \frac{\omega}{E_0} \left[1 + \frac{\omega}{2E_0} \left(1 - \frac{\psi}{\theta_s} \right) \right] .$$

Cette expression est valable dans la mesure où la condition $\frac{\omega^2}{\theta_s^2} \ll 1$ est satisfaite, ce qui est toujours le cas.

Pour compléter nous supposons aussi que le rapport $\frac{k'}{k}$ reste égal quel que soit le numéro de canal considéré à l'expression $\left(1 - \frac{\omega}{2E_0} \right)$. Ainsi la section efficace $\sigma[q_{\epsilon_n + \omega, \epsilon_n}^2, \omega]$ devient-elle par ces approximations indépendante du numéro de canal (n) choisi et l'intégrale simple (II.25) apparaît-elle alors comme un simple produit de convolution dans lequel le vecteur $\vec{q}_0^*(\omega)$ représente le vecteur de diffusion effectif. Sur le schéma de diffusion de la

figure (15) il est facile de le construire. Par le point A sur la direction de l'axe du faisceau incident (rappelons que $\vec{OA} = \vec{k}_0$) traçons la droite perpendiculaire à l'axe incident qui coupe la direction commune des neutrons diffusés en H'_0 . De ce point portons le segment $H'_0 H_0$ dont la valeur algébrique est égale à pour un changement d'énergie ω fixé :

$$\overline{H'_0 H_0} = + \frac{k_0}{2E_0} \omega .$$

Nous avons choisi dans le cas de la figure (17) $\omega < 0$.

Par le point H_0 ainsi déterminé traçons la droite (Δ_0) parallèle à la première droite AH'_0 , elle coupe la droite (Ψ) au point O'_0 . Le vecteur $\vec{O'_0 H'_0}$ est le vecteur de diffusion effectif $\vec{q}_0^*(\omega)$ que nous cherchons (cf. la figure (17)).

Quand ω varie l'extrémité du vecteur $\vec{q}_0^*(\omega)$ reste fixée sur le point H'_0 , alors que son origine O'_0 se déplace autour du point A sur la droite Ψ . Le produit de convolution s'écrit :

$$I(\bar{\theta}_s, n) \approx \text{Cte} \int d\omega e^{-\frac{[(\epsilon_{n_0} - \epsilon_n) - \omega]^2}{2[(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]}} \sigma(q_0^*(\omega)^2, \omega) + F . \quad (\text{II.26})$$

Récapitulons les approximations qui ont permis d'aboutir à une expression de l'intensité relativement simple :

(a) La fonction transmission et la probabilité de comptage dans le canal (n) restent des gaussiennes suivant les énergies. Le calcul se présenterait sous des abords moins faciles si on avait été obligé de raisonner avec les temps de vol.

(b) Compte tenu des valeurs expérimentales des paramètres $(\Delta\alpha)$, α_E , (ΔE) , et a et η_M qui interviennent dans la fonction transmission du sélecteur mécanique le résultat de l'intégration sur α est égal à la section efficace de L. Van Hove dans laquelle le vecteur de diffusion $\vec{q}$ prend la valeur la plus probable $\vec{q}_{E,E'}$ dans un processus de diffusion où les énergies incidente et diffusée E et E' sont fixées. C'est certainement une des approximations les plus importantes du calcul de l'intégrale multiple (II.18).

(c) La probabilité de comptage dans le canal (n) $P_n(E')$ est une gaussienne si étroite qu'on peut écrire sans commettre une erreur importante que l'intégrale sur l'énergie incidente E est proportionnelle à la section efficace de L. Van Hove dans laquelle le vecteur de diffusion le plus probable $\vec{q}_{E,E'}$ prend la valeur $\vec{q}_{\epsilon_n+\omega, \epsilon_n}$.

(d) La dernière approximation consiste à écrire que la section efficace $\sigma[q_{\epsilon_n+\omega, \epsilon_n}^2, \omega]$ est en fait indépendante de la valeur du numéro (n) de canal choisi. Le calcul montre que cette approximation est raisonnable en ce qui concerne le vecteur $\vec{q}_{\epsilon_n+\omega, \epsilon_n}$ dont la valeur du module diffère toujours assez peu de celle du module du vecteur $\vec{q}_{\epsilon_{n_0}+\omega, \epsilon_{n_0}}$ que nous appelons le vecteur de diffusion effectif du processus de diffusion $\vec{q}_0^*(\omega)$. Pour ce qui est de la valeur du rapport $\frac{k'}{k}$ l'approximation est plus grossière. Cette approximation permet de réduire les temps de calcul sur ordinateur dans des proportions considérables.

(e) Dans toutes les étapes du calcul nous avons explicitement supposé que le processus de diffusion est quasi-élastique c'est-à-dire que nous avons les conditions :

$$\frac{\omega}{E}, \quad \frac{\omega}{E_0}, \quad \frac{\omega}{\epsilon_n} \ll 1.$$

F - ANALYSE DES SPECTRES

Si dans la formule (II.26) du produit de convolution nous supposons à présent que la section efficace $\sigma(q_0^*(\omega)^2, \omega)$ est en fait proportionnelle à une fonction de Dirac $\delta(\omega)$ alors nous retrouvons le spectre du faisceau incident transmis par le sélecteur mécanique $I_0(n)$, c'est l'image que donne l'analyseur de la fonction transmission du sélecteur :

$$I_0(n) \approx e^{-\frac{[(\epsilon_{n_0} - \epsilon_n)]^2}{2[(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2]}}.$$

Cette formule est équivalente à (II.12) où les temps de vol étaient utilisés.

Ce spectre incident avait fait l'objet d'une étude préliminaire tant théorique qu'expérimentale qui a été décrite en détail dans le chapitre II précédent. La forme expérimentale du spectre incident cependant est mal décrite par l'expression gaussienne ci-dessus; aussi afin de prendre en charge le plus possible la légère dissymétrie observée sur les ailes l'avons nous multipliée par le développement en polynômes d'Hermite que nous avons arrêté à un ordre (le 8ème) tel que la dissymétrie soit parfaitement interprétée :

$$\sum_{j=0}^{j=8} B_j H_j \left(\frac{\epsilon_{n_0} - \epsilon_n}{\sqrt{(\Delta E)^2 + a^2 \eta_M^2}} \right) .$$

Les termes impairs d'un tel développement doivent rendre compte de la légère assymétrie du spectre incident.

Revenons au cas général où le processus de diffusion existe, l'équation du spectre s'écrit alors :

$$I(\bar{\theta}_s, n) = \text{Cte} \int d\omega \mathcal{R}(\omega_{n_0, n} - \omega) \sigma(q_0^*(\omega)^2, \omega) + F \quad (\text{II.27})$$

où (a) la fonction résolution $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\mathcal{R}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}} \cdot \sum_{j=2}^{j=8} B_j H_j \left(\frac{\omega}{\sigma} \right) + 1 \}$$

$$(b) \quad \omega_{n_0, n} \equiv \epsilon_{n_0} - \epsilon_n = E_0 - \epsilon_n .$$

Le problème est, à partir des spectres observés, de déterminer les paramètres Λ et K_1 qui ont un intérêt physique. Cette détermination suppose qu'on connaisse les paramètres qui entrent en compte dans la fonction résolution $\mathcal{R}$ et qui sont σ et la suite des coefficients B_j . La valeur de σ a été déterminée aussi bien théoriquement que par diverses méthodes expérimentales (cf. chapitre II), l'accord est satisfaisant.

La détermination des paramètres Λ et K_1 s'effectue en deux étapes :

(a') La première étape consiste à trouver les valeurs expérimentales des

paramètres σ , $B_2, \dots, B_8$ de la fonction de résolution $\mathcal{R}$ à partir du spectre du faisceau incident observé sur l'analyseur.

(b') La première étape franchie la détermination des valeurs des paramètres Λ et K_1 s'effectue à partir des spectres diffusés observés sur l'analyseur.

L'ajustement des valeurs expérimentales des divers paramètres est effectué selon une méthode et des programmes de calcul sur ordinateur élaborés par M. Tournarie^[39].

La méthode de M. Tournarie est très complexe, aussi nous ne la développons pas ici ; nous n'en mentionnerons qu'un aspect. Dans cette méthode on définit un facteur de qualité f (plus précisément un estimateur de qualité pour reprendre les propres termes de l'auteur). Dans l'analyse des spectres observés la valeur du facteur f indique si d'une part les expressions analytiques de la section efficace et de la fonction de résolution décrivent bien le phénomène physique et si d'autre part l'approximation du produit de convolution est justifiée. Ce facteur de qualité est un nombre compris entre 0 et 1 et on peut considérer que l'accord avec le spectre observé est satisfaisant si sa valeur est voisine de l'unité. En ce qui concerne l'étude préliminaire de la fonction de résolution $\mathcal{R}(\omega_{n_0, n})$ l'analyse sur ordinateur montre que l'expression contenant le développement en polynômes d'Hermite jusqu'à l'ordre 8 est bonne car la valeur trouvée pour le facteur de qualité est égale à 0,96, c'est dire qu'elle approche de très près l'unité. Les valeurs des paramètres σ , $B_2, \dots, B_8$ sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

$\sigma(\text{meV})$	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
0,123	$5,648.10^{-2}$	$2,613.10^{-3}$	$-1,338.10^{-2}$	$5,605.10^{-5}$	$2,119.10^{-4}$

B_7	B_8
$2,284.10^{-5}$	$1,223.10^{-4}$

La valeur du paramètre σ trouvée par la méthode de M. Tournarie est en accord satisfaisant avec les déterminations reportées en II.II.C. et avec la valeur ($\mu \approx 9,3 \text{ canaux}$) exprimée en meV ; l'écart ne dépasse pas 6 %.

Comme nous avons déjà dit dans le chapitre IV de la première partie le but des expériences réalisées à Saclay est d'atteindre la région hydrodynamique et les récents calculs théoriques de Résibois et Piette nous ont servi de fil directeur dans la présentation et l'interprétation des résultats. Les calculs théoriques de Résibois et Piette permettent de dégager le concept d'une région "quasi-hydrodynamique" ($1, < K_1/q < 4,$) où la fonction d'échelle $f(K_1/q)$ commence à croître (cf. figure 3). L'analyse de nos résultats expérimentaux montrent bien l'existence d'une telle région où la forme (I.51) de la fonction relaxation $\Phi_q(\omega)$ définie dans la région hydrodynamique reste encore valable mais où la loi de variation avec la température du paramètre Λ n'est pas encore la loi limite définie dans cette dernière région.

D'autre part nous avons procédé à des expériences juste à la température de Curie. La série des spectres n'est pas analysée selon la méthode exposée en deuxième partie car la forme exacte de la fonction relaxation $\Phi_q(\omega)$ n'est pas alors connue. L'interprétation de cette série de mesures fait l'objet d'un chapitre à part.

TROISIEME PARTIE

I - ANALYSE DES RESULTATS AU-DESSUS DE LA TEMPERATURE DE CURIE T_c

A - DETERMINATION DE LA TEMPERATURE DE CURIE

La recherche de la température de Curie par les mesures neutroniques s'effectue de la façon suivante : On procède à angle de diffusion $\bar{\theta}_s$ fixé à une mesure de la variation de l'intensité des neutrons diffusés en fonction de la température. Le maximum d'intensité observé se produit quand la température est égale à la température de Curie (cf. la figure (18)), d'où la détermination de cette dernière. Cependant si on se réfère à la théorie de M.E. Fisher et R. Burford le critère du maximum pour définir la température de Curie n'est pas rigoureux^[13]. Selon eux le maximum ne correspond pas exactement à la température de Curie et de plus sa position est fonction de la grandeur du vecteur de diffusion $\vec{q}$. Des expériences

ont mis en évidence un déplacement de la position du maximum en fonction de la grandeur du vecteur $\vec{q}$ ^[40]. Il faut toutefois noter que ce déplacement n'est décelé que pour des valeurs du vecteur $\vec{q}$ relativement grandes ($q > 0,15 \text{ \AA}^{-1}$). Pour les valeurs du vecteur de diffusion moyen $\vec{q}_0$ considérées dans nos expériences ($q_0 < 0,07 \text{ \AA}^{-1}$) nous n'avons observé aucun déplacement significatif de la position du maximum et ainsi pouvons-nous considérer que la température de Curie est bien déterminée par la position du maximum d'intensité des neutrons diffusés conformément à ce qu'indique la formule de Ornstein-Zernike (I.49). Selon les séries de mesures, chaque série correspondant à un angle de diffusion $\bar{\theta}_s$ fixé, les valeurs expérimentales de la température de Curie T_c sont comprises entre $1041,2^\circ\text{K}$ et $1041,8^\circ\text{K}$; d'où une valeur moyenne $T_c = 1041,5^\circ\text{K} \pm 0,5^\circ\text{K}$. Si on compare notre détermination à celles obtenues par des mesures conventionnelles, nous nous apercevons qu'elle leur est légèrement inférieure :

(a) Les mesures de susceptibilité donnent des valeurs de la température de Curie égales à $1041,8^\circ\text{K}$ et 1044°K ^[32].

(b) Les mesures de chaleur spécifique donnent : $T_c = 1043,0 \pm 1,0^\circ\text{K}$ ^[32].

(c) Les mesures basées sur l'effet Mossbauer donnent la valeur $1042,0 \pm 0,3^\circ\text{K}$ ^[32].

Néanmoins on voit que l'accord entre nos mesures neutroniques et les mesures conventionnelles est satisfaisant.

Avant d'effectuer chaque série de mesures nous avons procédé chaque fois à la recherche de la température de Curie pour plus de sûreté.

- L'examen de la figure (18) montre que dans la phase paramagnétique ($T > T_c$) la décroissance de l'intensité est bien marquée contrairement à ce qu'on observe dans la phase ferromagnétique ($T < T_c$). La variation de l'intensité dans nos expériences est tout-à-fait similaire à celle mise en évidence voici quelques années par B. Jacrot^[14]. En-dessous de la température de Curie nous remarquons à côté du "pic" de diffusion critique l'existence d'un "plateau" horizontal (cf. la figure (18)) qu'on attribue aux ondes de spin.

B - METHODE D'EXPLORATION DES REGIONS HYDRODYNAMIQUE ET QUASI-HYDRODYNAMIQUE

Dans nos expériences le domaine du $1/4$ plan (q_0, K_1) exploré est indiqué en figure (19). Nous avons effectué :

(a) une série de mesures à température constante, laquelle est définie par $\frac{T-T_c}{T_c} = 0,01837$. Le domaine étudié correspond à l'intervalle suivant : $0,017 < q_0 < 0,068 \text{ \AA}^{-1}$.

(b) 4 séries de mesures en fonction de la température $0,025 \leq \frac{T-T_c}{T_c} \leq 0,042$ à angle de diffusion $\bar{\theta}_s$ fixe; elles correspondent aux valeurs de q_0 suivantes :

$$0,0196 \text{ \AA}^{-1} , \quad 0,0264 \text{ \AA}^{-1} , \quad 0,043 \text{ \AA}^{-1} , \quad 0,0495 \text{ \AA}^{-1} .$$

Selon les définitions des régions hydrodynamique et quasi-hydrodynamique que nous avons données en se basant sur les calculs de P. Résibois et C. Piette il ressort, après examen du schéma de la figure (19) que seules les séries faites à q_0 égal à $0,0196$ et $0,0264 \text{ \AA}^{-1}$ permettent d'atteindre la région hydrodynamique. Cependant dans la réalité expérimentale nous verrons qu'aux deux valeurs de q_0 supérieures quelques uns des spectres faits à haute température peuvent être considérés comme appartenant déjà à la région hydrodynamique. Compte tenu de cette remarque les deux séries de mesures faites à q_0 égal à $0,043$ et $0,0495 \text{ \AA}^{-1}$ et celle effectuée à température constante correspondent plutôt à la région quasi-hydrodynamique.

Les élargissements introduits par le processus de diffusion des neutrons dans les spectres observés sont faibles comparés à la $1/2$ largeur à mi-hauteur

du spectre incident qui d'après la valeur de σ figurant dans le tableau du Ch.(II-III-F) est égale à 0,143 meV. Par exemple si à la valeur $0,05 \text{ \AA}^{-1}$ du module du vecteur de diffusion moyen $\vec{q}_0 (q_0 = k_0 \bar{\theta}_s)$ cet élargissement représente encore 25 % de la 1/2 largeur à mi-hauteur, il n'en représente plus que 4 % si la valeur du module de $\vec{q}_0$ devient égale à $0,02 \text{ \AA}^{-1}$; dans ce dernier cas l'élargissement est comparable en grandeur à l'incertitude avec laquelle est connue la 1/2 largeur. De cette constatation on pourrait déduire que toute mesure précise des paramètres K_1 et Λ est impossible. Mais on peut remarquer sur la figure (19) que si dans la partie centrale la forme du spectre diffusé à $q_0 = 0,02 \text{ \AA}^{-1}$ se confond pratiquement avec celle du spectre incident, il n'en est plus de même dans les "ailes". Sur la figure (20) on voit bien que le caractère lorentzien de la section efficace s'affirme sur les ailes du spectre diffusé et ceci rend possible l'analyse numérique de celui-ci afin d'en tirer les valeurs des paramètres K_1 et Λ .

Récrivons l'expression (II.27) de l'intensité $I(\bar{\theta}_s, n)$ des neutrons diffusés dans le canal n de l'analyseur en explicitant la forme de la section efficace :

$$I(\bar{\theta}_s, n) = N \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathcal{R}(\omega_{n, n_0} - \omega) \frac{1}{1 + \left[\frac{q_0^*(\omega)}{K_1} \right]^2} \frac{\Lambda [q_0^*(\omega)]^2}{\omega^2 + \left[\Lambda [q_0^*(\omega)]^2 \right]^2} + F \quad (\text{III.1})$$

Ecrit sous cette dernière forme l'expression de l'intensité $I(\bar{\theta}_s, n)$ présente des avantages ; la norme N est proportionnelle d'une part à la quantité $(r_1^2 K_1^2)^{-1}$ d'autre part au flux incident arrivant sur l'échantillon et à la surface de détection du compteur. Dans la mesure où nous ramenons tous les spectres aux mêmes conditions d'exposition au flux incident et aux mêmes conditions de détection la norme N n'est plus proportionnelle qu'au produit $T\chi$ où χ est la susceptibilité ferromagnétique compte tenu de la relation (I.21). Ainsi peut-on en principe déterminer simultanément pour chaque spectre les trois paramètres N , K_1 et Λ et la détermination de la loi de variation de la quantité $\frac{T_c}{T} N$ avec la température permet-elle de connaître la variation relative de la susceptibilité χ au voisinage de la température de Curie T_c . Dans la mesure où, par notre procédure, nous retrouvons la variation relative de la susceptibilité avec la température connue par d'autres méthodes de mesures et en lesquelles nous avons confiance, nous accorderons quelque crédit aux valeurs

trouvées des paramètres K_1 et Λ ainsi qu'à leur loi de variation avec la température. Remarquons que quelle que soit l'expression théorique choisie pour la susceptibilité χ_q la norme reste toujours proportionnelle au produit $T\chi$.

En réalité la détermination simultanée des paramètres N , K_1 et Λ s'avère bien souvent impossible. En effet si :

(a) la valeur de l'angle de diffusion moyen $\bar{\theta}_s$ est fixée de sorte que la quantité $\left[\frac{q_o^*(\omega)}{K_1} \right]^2$ figurant dans (III.1) est petite devant l'unité, nous devons nous attendre à une certaine indétermination sur les valeurs expérimentales du paramètre K_1 .

(b) La température est trop voisine de T_c de sorte qu'au contraire la quantité $\left[\frac{q_o^*(\omega)}{K_1} \right]^2$ est grande devant l'unité, les déterminations de la norme N et du paramètre K_1 peuvent dépendre l'une de l'autre.

La région quasi-hydrodynamique ne correspond à aucun des 2 cas (a) et (b) ci-dessus et la détermination simultanée des paramètres N , K_1 et Λ peut y être effectuée raisonnablement. Cependant même dans le cas où la détermination du paramètre K_1 est possible l'incertitude sur les valeurs trouvées de celui-ci est généralement importante à cause du degré de précision sur la détermination expérimentale du bruit de fond F qui affecte surtout et de façon considérable celle de K_1 (cf. par exemple la figure (22)). Dans la région hydrodynamique, par contre, nous rencontrons la situation décrite par le cas (a) et pour extraire de chaque spectre diffusé la valeur du paramètre Λ , nous préférons fixer à priori la valeur du paramètre K_1 dans le produit de convolution (III.1), cette valeur étant celle qu'on déduit de la loi de variation de K_1 en fonction de la température dans la région quasi-hydrodynamique. D'une façon générale les analyses numériques montrent que toutes les fois où la valeur du paramètre K_1 est fixée dans le programme de calcul l'estimation du paramètre Λ est peu affectée par une variation même importante de la valeur considérée du paramètre K_1 .

Tant que la valeur du rapport K_1/q_o reste supérieure à l'unité c'est-à-dire dans les régions quasi-hydrodynamique et hydrodynamique les valeurs trouvées du facteur de qualité f (défini dans la méthode de Tournarie) nous autorisent à penser que l'utilisation de la forme lorentzienne de la fonction relaxation $\Phi_q(\omega)$ pour l'analyse des résultats est raisonnable quoique cette

forme ne soit théoriquement établie que pour la région hydrodynamique. Au deuxième stade de l'analyse des résultats expérimentaux quand nous avons cherché à déterminer les lois de variation des quantités K_1^2 , Λ et $\frac{T_c}{T} N$ en fonction de la température, les estimations des paramètres K_1^2 , Λ et de la quantité $\frac{T_c}{T} N$ retenues sont celles qui correspondent aux spectres pour lesquels la valeur du facteur de qualité f est supérieure à 0,8. Les barres d'erreur tracées sur les figures (21,22,23,25) pour quelques estimations de K_1^2 , Λ et $\frac{T_c}{T} N$ sont données en même temps que celles-ci par l'analyse des spectres faite selon la méthode et les programmes de calcul de M. Tournarie. Dans cette analyse seules les incertitudes statistiques sur les comptages sont prises en considération ; des erreurs expérimentales accidentelles n'étant jamais impossibles, nous avons essayé d'en tenir compte dans la mesure du possible en faisant varier la grandeur des barres d'erreur. Les diverses analyses numériques ultérieures ont montré que la valeur ajustée des exposants critiques 2ν , ν et γ dépendait assez peu de la barre d'erreur affectée à chaque estimation des paramètres K_1^2 , Λ et $\frac{T_c}{T} N$.

C - MISE EN EVIDENCE DE LA REGION QUASI-HYDRODYNAMIQUE

Pour la série de mesures effectuées à température constante ($\frac{T-T_c}{T_c} = 0,01837$) la détermination simultanée des paramètres K_1 et Λ n'est possible que si la valeur du module du vecteur de diffusion moyen $\vec{q}_0$ reste supérieure à $0,04 \text{ \AA}^{-1}$. Pour les valeurs inférieures ($q_0 < 0,04 \text{ \AA}^{-1}$) les valeurs trouvées du paramètre K_1 sont fortement dispersées alors que pour les valeurs supérieures ($q_0 > 0,04 \text{ \AA}^{-1}$) les valeurs de ce paramètre sont sensiblement égales pour tous les spectres analysés. Nous pensons que si la valeur du module du vecteur $\vec{q}_0$ devient inférieure à $0,04 \text{ \AA}^{-1}$, nous nous trouvons en fait dans la situation décrite par le cas (a) du paragraphe précédent, nous commençons alors à pénétrer dans la région hydrodynamique. Aussi sur la figure (21) avons nous présenté les estimations des paramètres K_1 et Λ dans le domaine $0,04 < q_0 < 0,07 \text{ \AA}^{-1}$. Nous remarquons sur la figure (21) la légère croissance du paramètre Λ avec le module de $\vec{q}_0$. Ce résultat s'interprète aisément comme nous verrons plus loin.

Pour les valeurs de q_0 inférieures à $0,04 \text{ \AA}^{-1}$ en plus des raisons invoquées ci-dessus pour expliquer les valeurs non réalistes de K_1 on peut penser que l'influence de la divergence angulaire dont nous n'avons pas tenu

compte commence à se faire sentir et en plus quand l'angle de diffusion $\bar{\theta}_s$ devient trop petit, la première approximation portant sur l'intégration suivant l'angle α risque de devenir caduque (cf. II-III-C).

- Dans les deux séries de mesures à angle de diffusion $\bar{\theta}_s$ fixe* où nous avons la possibilité de trouver à la fois pour chaque spectre la valeur de K_1 et la valeur de Λ , cette détermination simultanée n'a lieu qu'au delà d'une certaine température correspondant à $\frac{T-T_c}{T_c} > 0,006$. Si la température est inférieure à cette limite nous rencontrons la situation décrite dans le cas (b) du paragraphe précédent. Quand la température se rapproche de la température de Curie T_c nous avons observé que les valeurs du paramètre K_1 ne tendaient pas vers zéro et que concurremment celles de la norme N conduisaient en ce qui concerne la variation de la susceptibilité χ à une indépendance de cette dernière vis à vis de la température ce qui n'est pas raisonnable physiquement. De plus quand la température devient trop voisine de celle de Curie l'expression de la fonction relaxation $\Phi_q(\omega)$ n'a pas de raison de conserver une forme lorentzienne, ce qui peut avoir une influence sur l'estimation du paramètre K_1 puisque nous utilisons une expression incorrecte (I.54) de la section efficace.

Les estimations du paramètre K_1^2 et de la quantité $\frac{T_c}{T} N$ portées sur la figure (22) correspondent à l'intervalle de température $0,006 < \frac{T-T_c}{T_c} < 0,04$ où la détermination simultanée des paramètres K_1 , N et Λ est possible. Les valeurs correspondantes du paramètre Λ sont quant à elles rassemblées sur une figure à part, la figure (23). Sur la figure (24) nous avons porté pour l'ensemble des séries de mesures considérées jusqu'ici les valeurs expérimentales de la quantité $\Lambda/\sqrt{q_0}$ en fonction des valeurs expérimentales du rapport K_1/q_0 . Au facteur de proportionnalité c près qui figure dans la relation (I.52):

$$\omega_{K_1}(q) = c q^{5/2} f\left(\frac{K_1}{q}\right).$$

On remarque de suite que la variation de la quantité $\Lambda/\sqrt{q_0}$ en fonction du rapport K_1/q_0 s'accorde bien, compte tenu des incertitudes expérimentales que nous n'avons pas fait figurer, avec celle de la fonction "d'échelle" calculée par P. Résibois et C. Piette. La valeur du facteur c qu'on ajuste à partir des données mesurées est égale à $138 \pm 2 \text{ meV } \text{\AA}^{5/2}$. L'ajustement s'effectue par la méthode de M. Tournarie et par des programmes de calcul élaborés par ce dernier.

* q_0 égal à $0,043$ et $0,0495 \text{ \AA}$.

A partir de l'ensemble des estimations rassemblées en figure (24) nous pouvons nous rendre à l'évidence que celles-ci vérifient effectivement mieux la variation de la fonction "d'échelle" $f(K_1/q)$ calculée par P. Résibois et C. Piette que celle de son expression asymptotique valable dans la région hydrodynamique. Cette constatation nous paraît fournir une preuve expérimentale qui justifie le concept de région quasi-hydrodynamique introduit de façon formelle dans l'introduction de la partie III. La légère croissance du paramètre Λ en fonction des valeurs de q_0 qu'on observe en figure (21) vient encore renforcer notre opinion.

A cause des difficultés rencontrées dans la détermination du bruit de fond F les valeurs du paramètre K_1^2 issues de notre analyse sont relativement dispersées (cf. figure (22)). Cependant cela n'empêche pas d'obtenir à partir de ces estimations une loi de variation du paramètre K_1^2 en fonction de la température qui est bien représentée par l'expression (I.50) :

$$K_1^2 = B \left(\frac{T-T_c}{T_c} \right)^y \quad (\text{III.2})$$

où :

$$\begin{cases} y = 1,55 \pm 0,16 \\ B = 3,36 \pm 1,89 \text{ Å}^{-2} \end{cases}$$

La forte incertitude sur la valeur B reflète la dispersion observée dans les estimations de K_1^2 .

Dans le même temps à partir des valeurs normalisées de la quantité $\frac{T}{T_c} N$ reportées en figure (22) nous avons pu déterminer dans l'intervalle de température $0,006 < \frac{T-T_c}{T_c} < 0,04$ la variation relative avec la température de la susceptibilité χ . Cette variation se traduit par la valeur suivante de l'exposant critique γ :

$$\gamma = 1,31 \pm 0,05 \quad (\text{III.3})$$

En ce qui concerne la série de mesure effectuée à température constante la valeur moyenne du paramètre K_1^2 obtenue à partir des estimations faites dans l'intervalle $0,04 < q_0 < 0,07 \text{ Å}^{-1}$ (cf. la figure (21)) est égale à :

$$K_1^2 = 0,00695 \pm 0,00034 \text{ Å}^{-2} .$$

En figure (22) on remarque que cette valeur moyenne du paramètre K_1^2 se place bien sur la droite représentative (en coordonnées logarithmiques) de la loi (III.2).

D - MISE EN EVIDENCE DE LA REGION HYDRODYNAMIQUE

En principe seules les deux séries de mesures faites aux valeurs de q_0 suivantes : 0,0196 et 0,0264 Å⁻¹ permettent d'atteindre la région hydrodynamique (cf. le schéma de la figure (19)). Malheureusement pour ces deux séries de mesures il ne nous a pas été possible de déterminer les valeurs du paramètre K_1^2 . Aussi l'analyse a été faite en prenant à chacune des températures où on observe un spectre diffusé la valeur de K_1^2 dans le produit de convolution (III.1) donné par la loi de variation (III.2) obtenue dans la région quasi-hydrodynamique. Cette analyse a été étendue aux deux séries de mesures à q_0 constant que nous avons déjà dépouillées. Toutes les estimations du paramètre Λ (même celles correspondant à une mauvaise valeur du facteur f) ont été rassemblées sur les figures (25,a,b,c,d). Sur les figures (25,c,d) nous avons aussi reporté toutes les déterminations de Λ obtenues dans l'analyse précédente où le paramètre K_1^2 est lui-même une inconnue. (Pour la plupart de ces déterminations notre critère de qualité $f > 0,8$ est satisfait en réalité.)

D'une manière analogue à celle qui a permis de mettre en évidence la région quasi-hydrodynamique, nous avons rassemblé en figure (26) les estimations de la quantité $\Lambda/\sqrt{q_0}$ en fonction des valeurs du rapport K_1/q_0 . L'accord avec la courbe de variation de la fonction d'échelle $f(K_1/q_0)$ calculée par P. Résibois et C. Piette est encore satisfaisant mais la valeur du facteur de proportionnalité c est quelque peu différente de celle trouvée précédemment puisqu'elle est égale à 147 ± 2 meV Å^{5/2}. Nous pensons cependant qu'il n'est pas nécessaire de s'arrêter outre mesure sur cette différence car la valeur exacte du facteur c revêt une importance secondaire au regard de l'essentiel que constitue la variation relative de la quantité $\Lambda/\sqrt{q_0}$ en fonction du rapport K_1/q_0 .

En même temps que le paramètre Λ , nous mesurons toujours la norme N , nous pouvons donc obtenir la variation relative de la susceptibilité χ avec la température. Pour les quatre séries de mesures effectuées à angle de diffusion $\bar{\theta}_s$ constant nous avons porté sur la figure (27) toutes les valeurs

normalisées de la quantité $\frac{T}{T_c} N$ sauf pour ce qui est de celles correspondant à la série de mesures faite à la plus petite valeur de l'angle $\bar{\theta}_s$ où les seules valeurs reportées sont celles obtenues dans la région hydrodynamique (en figure (25a) elles correspondent aux estimations de Λ situées à droite de la flèche). L'examen de la figure (27) appelle plusieurs remarques :

(a) Les valeurs de la quantité $\frac{T}{T_c} N$ correspondant à la valeur de q_0 égale à $0,0196 \text{ Å}^{-1}$ sont toutes systématiquement plus élevées que celles correspondant aux trois autres valeurs de q_0 . La raison de ce "décalage", nous ne pouvons pas bien nous l'expliquer.

(b) Sur tout le domaine des températures considérées dans les expériences $(0,0026 < \frac{T-T_c}{T_c} < 0,042)$ on peut se rendre compte à présent que le paramètre K_1 n'est plus une inconnue du problème, que les estimations de la quantité $\frac{T}{T_c} N$ se placent dans le système de coordonnées logarithmiques qui est celui de la figure (27) à peu près suivant une droite si on porte en abscisse l'écart relatif de température $\frac{T-T_c}{T_c}$. L'indépendance en fonction de la température observée pour ce qui est des valeurs de la norme N quand la température se rapprochait trop de T_c ($\frac{T-T_c}{T_c} < 0,006$) dans le cas où K_1 était une inconnue à déterminer (mise en évidence de la région quasi-hydrodynamique) n'existe plus. Nous avons là la preuve de ce que nous avançons dans le cas (b) du paragraphe (III.I.B)

(c) En laissant de côté les valeurs de la quantité $\frac{T}{T_c} N$ obtenues pour la valeur de q_0 égale à $0,0196 \text{ Å}^{-1}$, on montre que pour tout l'intervalle de température étudié $(0,0026 < \frac{T-T_c}{T_c} < 0,042)$ la variation de cette quantité qui reflète le comportement de la susceptibilité χ est très comparable à celle que nous observions quand nous cherchions à mettre en évidence la région quasi-hydrodynamique (cf. figure (22)). Sur la figure (27) nous n'avons pas tracé la droite correspondant au meilleur ajustement des points déterminés aux valeurs $0,0264$, $0,043$ et $0,0495 \text{ Å}^{-1}$ de q_0 mais il n'en reste pas moins que la valeur de l'exposant γ est voisine de celle déjà connue ($\gamma = 1,31$).

E - LOIS DE VARIATION DU PARAMETRE Λ AVEC LA TEMPERATURE

Les mesures des paramètres K_1 et Λ ont été faites dans l'intervalle $0,8 < K_1/q_0 < 3,3$. A partir des déterminations du paramètre Λ faites dans la région quasi-hydrodynamique il est possible d'obtenir la variation de celui-ci en fonction de la température, laquelle est bien traduite par une loi du type (cf. I.III.E) :

$$\Lambda = \Lambda_0 \left(\frac{T-T_c}{T_c} \right)^v \quad . \quad (III.4)$$

a) Avec les estimations de Λ issues de l'analyse où K_1 est lui-même une inconnue à déterminer (estimations qui sont portées sur la figure (23) et qui sont choisies parmi les cercles noirs des figures (25,c,d)) nous aboutissons pour le coefficient Λ_0 et l'exposant v aux valeurs suivantes :

$$\Lambda_0 = 52,0 \pm 6,8 \text{ meV } \text{\AA}^{+2} \quad ; \quad v = 0,26 \pm 0,04 \quad .$$

b) Avec les estimations de Λ issues de l'analyse où la variation de K_1^2 est fixée par la loi (III.2) et qui correspondent aux mêmes températures que les précédentes, les valeurs de Λ_0 et v trouvées sont :

$$\Lambda_0 = 56,1 \pm 7,8 \text{ meV } \text{\AA}^{+2} \quad ; \quad v = 0,27 \pm 0,04 \quad .$$

Ces deux résultats montrent que : les corrélations entre les déterminations des paramètres K_1^2 et Λ sont faibles. Le fait de fixer la valeur de K_1 dans le produit de convolution (III.1) n'amène de variation significative ni dans la valeur de l'exposant v , ni dans la valeur du coefficient Λ_0 . Ce point important mérite d'être souligné avant d'aborder l'étude de la variation du paramètre Λ dans la région hydrodynamique où nous avons été obligé de supposer connue celle du paramètre K_1 .

Dans la région hydrodynamique l'analyse ne porte en effet que sur la détermination du paramètre Λ . Dans cette région la section efficace est plus faible, aussi les spectres sont-ils mesurés avec une précision statistique moindre ; ce qui explique la plus forte dispersion des valeurs de la quantité $\Lambda/\sqrt{q_0}$ comme le montre la figure (26).

L'expérience montre qu'il nous est difficile de fixer la limite de la région hydrodynamique à une valeur du rapport K_1/q_0 aussi élevée que celle que nous avons avancée dans l'introduction de cette troisième partie ($K_1/q_0 = 4, \dots$). En effet, nous ne disposons sur la figure (26) que de trop peu de points d'abscisses supérieures à la valeur 4, pour pouvoir tirer quelque information précise sur la loi de variation de la constante de diffusion Λ . Aussi avons-nous abaissé un peu arbitrairement à 2,4 la valeur du rapport K_1/q_0 au-delà de laquelle nous considérons avoir atteint la région hydrodynamique. Ainsi peut-on déterminer les valeurs du coefficient Λ_0 et de l'exposant critique ν dans la formule (III.4) à partir d'un nombre suffisamment grand de valeurs expérimentales de la quantité $\Lambda/\sqrt{q_0}$ qui restent tout de même à proximité de la courbe asymptotique (figure (26)). En conséquence en considérant les seuls points de la figure (26) dont les abscisses sont supérieures à la valeur 2,4 (et qui vérifient notre critère de qualité $f > 0,8$), allons-nous estimer la variation du paramètre Λ en fonction de la température, paramètre que nous avons toute raison d'appeler à présent la constante de diffusion Λ . Les points considérés dans l'analyse sont pris parmi ceux qui correspondent sur chacune des figures (25,a,b,c,d) aux valeurs de Λ situées à droite des flèches (cercles blancs). Les valeurs du paramètre Λ ainsi sélectionnées que nous rassemblons en figure (28) permettent de calculer les valeurs du coefficient Λ_0 et de l'exposant ν . En définitif dans l'intervalle étudié $2,4 < K_1/q_0 < 7,1$ les résultats sont :

$$\Lambda_0 = 80,5 \pm 16,2 \text{ meV } \text{\AA}^{0+2} \quad ; \quad \nu = 0,38 \pm 0,06 \quad .$$

II - DISCUSSION ET COMPARAISON

Procédons à présent à une discussion de nos résultats, nous les comparerons avec ceux obtenus par ailleurs.

A - PARAMETRE K_1

Expliquons nous tout d'abord sur une erreur formelle commise dans l'analyse des mesures :

La variation du paramètre K_1^2 avec la température a été déterminée dans la région "quasi-hydrodynamique" en utilisant l'expression de Van Hove de la section efficace (I.54). Or cette expression ne s'applique en toute rigueur que :

a) dans la région hydrodynamique où selon les hypothèses des lois d'échelle la fonction relaxation $\Phi_q(\omega)$ a bien la forme lorentzienne donnée par la formule (I.51) .

b) si la formule de Ornstein-Zernike (I.49) de la susceptibilité statique réduite $\hat{\chi}_q$ est valable de façon générale.

L'examen de la figure (24) montre que les points expérimentaux de la région quasi-hydrodynamique ne s'écartent encore pas trop pour la plupart de la courbe asymptotique d'équation :

$$f\left(\frac{K_1}{q_0}\right) \propto \left(\frac{K_1}{q_0}\right)^{1/2},$$

ce qui semblerait indiquer de prime abord que la méthode d'analyse employée n'est pas aussi mauvaise qu'on aurait pu le craindre. Néanmoins tout donne lieu à penser que l'utilisation de la formule de Ornstein-Zernike (I.49) n'est pas étrangère à la croissance du paramètre K_1^2 avec la température que nous observons et qui est bien plus élevée que celle prévue par la théorie [13] [32] .

Les valeurs théoriques des exposants γ et γ du paramètre K_1^2 (I.50) et de la susceptibilité χ sont les suivantes dans le modèle d'Heisenberg compte tenu de l'estimation de l'exposant η de Fisher ($\eta = 0,075$, cf. I.II.D) :

$\gamma = 1,375$ (dans le cas du fer où le spin S est voisin de l'unité^[32])

$y = 1,43$.

L'analyse des mesures effectuées dans le cadre de l'approximation de Ornstein-Zernike conduit à une valeur de l'exposant γ donnée en (III.3) [$\gamma = 1,31 \pm 0,05$] . Une telle valeur si elle est légèrement inférieure à la valeur théorique ci-dessus du modèle d'Heisenberg est cependant en accord avec d'autres déterminations expérimentales^[32] . Par contre cette même analyse conduit en ce qui concerne l'exposant y à une valeur (III.2) [$y = 1,55 \pm 0,16$] différente de la valeur théorique ci-dessus de l'exposant γ , alors que l'égalité des deux exposants est prévue dans le cas où l'exposant η est nul (cf. I.IV.B et (I.25)). Comme il ne nous paraît guère raisonnable d'admettre une décroissance importante du paramètre r_1^2 de la formule de Ornstein-Zernike (I.49) avec la température (cf. la relation (I.20)) dans l'intervalle de température considéré dans l'expérience, les résultats concernant les valeurs des exposants y et γ sembleraient donc prouver la non-validité de la formule de Ornstein-Zernike au voisinage de la température et fourniraient un indice de l'existence d'une valeur positive de l'exposant η *.

A ce propos il est peut être bon de rappeler que la validité de la formule de Ornstein-Zernike imposerait dans le cas d'une faible décroissance du paramètre r_1^2 avec la température une valeur de l'exposant y égale à 2, (cf. I.II.B et I.II.C) ; en conséquence en voulant déterminer la variation de K_1^2 avec la température à partir d'une expression de la susceptibilité réduite χ_q qui n'est plus très correcte près de la température de Curie, il ne nous semble pas étonnant d'aboutir à une estimation fautive de l'exposant y qui serait en quelque sorte située entre les valeurs 2 et 4/3.

L'ensemble de nos résultats est en accord avec ceux publiés par D. Bally et ses collaborateurs dans leur premier article sur la diffusion critique des neutrons par le fer^[41] . Notamment la variation de K_1^2 avec la température qu'ils trouvent est comparable à la nôtre (cf. la figure (22)). Dans les études publiées ultérieurement^{[40][42]} , ces auteurs considèrent que l'exposant

* Valeur qu'on ne saurait calculer, en aucun cas, en introduisant dans la relation (I.25) {où $y = 2\nu$ } les valeurs expérimentales (III.2) et (III.3) des exposants y et γ .

η a une valeur positive ($\eta = 0,07$) et selon eux cette prise en compte de l'existence de l'exposant de Fisher abaisse la valeur de l'exposant y de K_1^2 à une valeur ($y = 1,38$) qui est plus en accord avec la théorie. A la lumière de ces résultats il semble donc qu'on puisse attribuer la valeur élevée de l'exposant y dans nos mesures à l'utilisation dans les analyses de la formule de Ornstein-Zernike.

La figure (29) rassemble un certain nombre de déterminations expérimentales de la variation de K_1^2 avec la température [41] [40] [14] [15] [21]. On remarque immédiatement la forte dispersion des divers résultats et pour ce qui est des déterminations faites par Bally et ses collaborateurs, l'influence attribuée à la valeur de l'exposant η de Fisher. Nous savons, à la suite d'un entretien avec le D. M. Totia l'une des collaboratrices du Professeur Bally, qu'une redétermination précise de la variation de K_1^2 avec la température est en cours et qu'elle est faite à la lumière des calculs de Résibois et Piette [43].

B - CONSTANTE DE DIFFUSION Λ

La différence qu'on observe entre la variation du paramètre Λ avec la température dans la région quasi-hydrodynamique (cf. figure (23)) où l'exposant v est égal à $0,26 \pm 0,04$ et celle dans la région hydrodynamique (cf. figure (28)) où l'exposant v est égal à $0,38 \pm 0,06$ s'explique bien par la variation de la fonction d'échelle $f(K_1/q)$ qu'ont calculé P. Résibois et C. Piette. Cette différence justifie le concept de région quasi-hydrodynamique.

Compte tenu des incertitudes sur les estimations des exposants y et v (de l'ordre de 10 %), les variations avec la température du paramètre K_1^2 et de la constante de diffusion Λ (ou du paramètre Λ dans la région hydrodynamique) sont compatibles avec la relation (I.53) que nous réécrivons :

$$\Lambda \propto K_1^{1/2} .$$

Malgré la valeur expérimentale de l'exposant v relativement élevée, l'accord avec la valeur théorique (I.48) [$v \approx 0,33$] du modèle d'Heisenberg est encore satisfaisant. Un des résultats importants de la théorie des lois

d'échelle est que les variations en fonction de la longueur de cohérence ξ de la constante des ondes de spin D et de la constante de diffusion Λ sont identiques (cf. I.III.C et le tableau I). Ce résultat est à peu près conservé si à la place de la longueur ξ on considère les variations des mêmes quantités en fonction de la valeur absolue de l'écart relatif $\left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)$ (cf. (I.48)). M.F. Collins et ses collaborateurs [21] trouvent que la constante D des ondes de spin varie avec la température suivant une loi du type (cf. I.III.E) :

$$D \propto \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{v'},$$

où $v' = 0,37 \pm 0,03$. [cf. le tableau III]

La valeur ci-dessus de l'exposant v' est sensiblement égale à notre valeur expérimentale de l'exposant v et l'une des prévisions essentielles de la théorie des lois d'échelle se trouve ainsi vérifiée expérimentalement.

La faible valeur de l'exposant v trouvée par les mêmes auteurs [$v = 0,14 \pm 0,04$ cf. le tableau III] et qui à l'époque avait fait croire à un échec de la théorie des lois d'échelle, est à présent bien expliquée par la variation de la fonction d'échelle $f\left(\frac{K_1}{q}\right)$ calculée par Résibois et Piette. D'abord J. Als Nielsen [34] puis ensuite V.J. Minkiewicz [23] en reprenant l'analyse des résultats de Collins ont montré que :

a) le domaine du $1/4$ plan (q, K_1) étudié correspondait à des valeurs du rapport K_1/q inférieures à 2 ,

b) dans ce domaine les résultats traduisaient bien la décroissance initiale de la fonction d'échelle $f\left(\frac{K_1}{q}\right)$ comme l'indiquent sur la figure (24) les valeurs déduites des données expérimentales et que nous avons représentées par des cercles noirs.

On peut se poser la question de savoir dans quelle mesure la méthode employée pour déterminer le paramètre K_1^2 :

a) évaluation formellement incorrecte de l'inélasticité liée à l'utilisation de l'expression lorentzienne (I.51) de la fonction relaxation ;

b) utilisation de l'expression de Ornstein-Zernike

peut influencer à son tour sur l'estimation de la loi de variation de la constante de diffusion Λ . Compte

tenu de la présente analyse mais sans être trop catégorique, nous avons toutes les raisons de supposer que l'influence reste faible.

Très récemment V.J. Minkiewicz^[23] a trouvé, dans le cas du nickel, une valeur de l'exposant v relativement élevée ($v = 0,44 \pm 0,07$). Cependant il n'apparaît pas clairement que la région "hydrodynamique" ait été effectivement atteinte.

III - ANALYSE DES RESULTATS A LA TEMPERATURE DE CURIE

Nous savons qu'à la température de Curie T_c les diverses théories ne prévoient pas de forme bien définie pour l'expression de la fonction relaxation $\Phi_q(\omega)$ et donc non plus d'expression précise de la section efficace. Cette imprécision théorique est un inconvénient majeur pour analyser les résultats expérimentaux relatifs à la région critique. Dans un premier stade nous avons essayé par la méthode utilisée jusqu'alors d'analyser les spectres diffusés à la température de Curie en conservant dans la section efficace une expression lorentzienne pour la fonction relaxation quelque peu modifiée : la 1/2 largeur à mi-hauteur jusqu'à présent égale au terme Λq^2 est identifiée au terme $c q^z$ qui n'est rien d'autre que l'expression de la fréquence caractéristique de la théorie "des lois d'échelle" quand on suppose que la fonction d'échelle $f(K_1/q)$ a la valeur unité. L'analyse se traduit par un échec :

Si l'expérience ne met pas en cause la forme lorentzienne de la fonction relaxation (les valeurs du facteur de qualité f restent assez voisines de l'unité), par contre elle est incapable de nous conduire à des estimations numériques du facteur de proportionnalité c et de l'exposant z . Dans le cas où on se fixe la valeur de l'exposant z à 2,5 nous avons trouvé un facteur de proportionnalité c fortement dépendant de la valeur choisie pour le vecteur de diffusion moyen $\vec{q}_0$. C'est pour cette raison que nous avons déterminé la valeur du facteur c à partir des données expérimentales au-dessus de la température de Curie et en se référant à l'expression de P. Résibois et C. Piette de la fonction d'échelle $f(K_1/q)$.

A - ANALYSE DES SPECTRES DIFFUSES A LA TEMPERATURE DE CURIE

Nous avons donc préféré utiliser une méthode d'analyse qui ne fait pas appel à une expression particulière de la section efficace. Cette méthode est basée uniquement sur une propriété remarquable du produit de convolution qui a trait au second moment : le moment d'ordre 2 d'une fonction résultant du produit de convolution de deux fonctions est égal à la somme des moments d'ordre 2 de celles-ci. Récrivons le produit de convolution donnant le nombre de

neutrons diffusés recueillis dans le canal n (II.27) :

$$I(\bar{\theta}_s, n) - F \approx \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathcal{R}(\omega_{n_0, n} - \omega) \sigma([q_0^*(\omega)]^2, \omega) .$$

Nous supposerons que cette formule reste applicable à la température de Curie bien que la section efficace ne soit plus donnée par l'expression de L. Van Hove.

Si i) $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{(2)}$ est le moment d'ordre 2 de la fonction résolution $\mathcal{R}$
 ii) $\mathcal{M}_{\sigma}^{(2)}$ " " " section efficace $\sigma([q_0^*(\omega)]^2, \omega)$
 iii) $\mathcal{M}_T^{(2)}$ " " " fonction $(I(\bar{\theta}_s, n) - F)$,

nous avons la relation suivante valable pour le produit de convolution de deux fonctions paires :

$$\mathcal{M}_T^{(2)} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{(2)} + \mathcal{M}_{\sigma}^{(2)} . \quad (\text{III.5})$$

En fait cette égalité est approchée car les fonctions $\mathcal{R}$ et σ ne sont pas rigoureusement des fonctions paires de ω_0 . $\mathcal{M}_T^{(2)}$ est une fonction du module du vecteur de diffusion moyen $\vec{q}_0$ (qui n'est pas, répétons-le, à confondre avec le vecteur de diffusion effectif $\vec{q}_0^*(\omega)$). A la température de Curie nous avons effectué l'étude des spectres diffusés dans l'intervalle $0,013 < q_0 < 0,066 \text{ \AA}^{-1}$. Après soustraction convenable du bruit de fond F nous avons calculé les moments d'ordre 2, $\mathcal{M}_T^{(2)}$, de tous les spectres diffusés et les différentes valeurs trouvées aux différentes valeurs de q_0 de l'intervalle ci-dessus vérifient bien la relation (III.5) où le moment d'ordre 2 de la section efficace s'écrit :

$$\mathcal{M}_{\sigma}^{(2)} = A q_0^b . \quad (\text{III.6})$$

La méthode d'analyse numérique de M. Tournarie conduit aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{(2)} &= 0,018 \pm 0,001 \text{ (meV)}^2 \\ A &= 52 \pm 10 \text{ (meV)}^2 \text{ \AA}^{-b} \\ b &= 2,51 \pm 0,11 \text{ (meV)} . \end{aligned}$$

La valeur du moment d'ordre 2, $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{(2)}$, est en excellent accord avec celle qu'on détermine des mesures de la fonction résolution effectuées sur le spectre incident (cf. II.III.F de la seconde partie). En effet, partant de l'expression (II.27) de la fonction résolution, le moment d'ordre 2 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{(2)}$ s'écrit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{(2)} = \sigma^2 [1+2B_2] \quad .$$

Avec les valeurs du tableau (cf. II.III.F) et les estimations des erreurs sur les coefficients B_i (qui ne figurent pas dans le tableau), on trouve : coeffi-

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{(2)} = 0,018 \pm 0,005 \text{ (meV)}^2$$

Sur la figure (30) nous avons porté en coordonnées logarithmiques les estimations numériques de la différence $\{\mathcal{M}_T^{(2)} - \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{(2)}\}$ (où $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{(2)}$ a la valeur trouvée présentement) en fonction des valeurs de q_0 pour lesquelles on a observé les spectres diffusés. La droite qui est tracée correspond aux valeurs du coefficient A et de l'exposant b données plus haut. On remarque le bon ajustement des points expérimentaux.

Il nous faut évaluer les moments d'ordre 4, $\mathcal{M}_T^{(4)}$, des spectres diffusés afin de déterminer la valeur du coefficient ρ donné par la relation :

$$\rho = 3 \frac{|\mathcal{M}_T^{(2)}|^2}{\mathcal{M}_T^{(4)}} \quad ,$$

et qui, selon la valeur qu'il prend, permet d'évaluer le caractère soit gaussien, soit lorentzien du spectre diffusé :

- (a) Pour un spectre gaussien la valeur du coefficient ρ est égale à l'unité.
- (b) Pour un spectre lorentzien cette valeur est nulle.

Ainsi le caractère gaussien de la fonction de résolution $\mathcal{R}(\omega_{n_0, n})$ est nettement affirmé du fait que la valeur du coefficient ρ est égale à 1,05. Pour ce qui est des spectres diffusés les valeurs trouvées pour le coefficient ρ oscillent entre 0,4 et 0,5 et de plus il ne semble pas exister de dépendance avec le module du vecteur de diffusion moyen $\vec{q}_0$. Le caractère des spectres

diffusés à la température de Curie T_c n'est ni gaussien, ni lorentzien, en réalité à partir des valeurs du coefficient ρ on peut montrer qu'il est plus lorentzien que gaussien. Nous sommes conscients de ce que comme dans l'analyse des résultats au-dessus de la température de Curie, la méthode employée fait jouer un rôle important aux ailes des spectres, donc au bruit de fond F . Dans ces mesures ce bruit de fond est plat et nous nous sommes assurés de sa faible influence sur la détermination du moment d'ordre 2 $\mathcal{M}_T^{(2)}$.

B - INTERPRETATION DES RESULTATS

Tentons d'interpréter le résultat concernant la valeur de l'indice b en supposant que la fonction relaxation $\Phi_q(\omega)$ prend la forme d'une lorentzienne tronquée suivant ω :

$$\Phi_q(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2 \operatorname{Artg} \left(\frac{\omega_0}{\gamma_q} \right)} \frac{\gamma_q}{\omega^2 + \gamma_q^2} & \text{si } |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_0 \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Avec une telle définition la fonction relaxation est normée à l'unité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_q(\omega) d\omega = 1 .$$

Nous considérons dans notre étude une fréquence de coupure ω_0 indépendante de la grandeur du vecteur de diffusion $\vec{q}$ mais nous n'avons aucune raison de supposer que sa valeur soit comparable à $\omega_c = 2J/\hbar$.

Selon la théorie des "lois d'échelle" la fréquence caractéristique $\omega_{K_1}(\vec{q})$ est définie par (cf. I.III.C et I.IV.B) :

$$\int_{-\omega_{K_1}(\vec{q})}^{+\omega_{K_1}(\vec{q})} \Phi_q(\omega) d\omega \equiv \frac{1}{2} .$$

La relation entre fréquence caractéristique et fréquence de coupure s'écrit alors :

$$\frac{\text{Arctg} \left(\frac{\omega_{K_1}(\vec{q})}{\gamma_{\vec{q}}} \right)}{\text{Arctg} \left(\frac{\omega_o}{\gamma_{\vec{q}}} \right)} = \frac{1}{2} \quad . \quad (\text{III.8})$$

Le moment d'ordre 2 de la fonction relaxation s'écrit :

$$\omega_{\vec{q}}^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \Phi_{\vec{q}}(\omega) d\omega \quad .$$

Avec l'expression (III.7) de $\Phi_{\vec{q}}(\omega)$ on trouve pour celui-ci :

$$\omega_{\vec{q}}^{(2)} = T_{\vec{q}} \left(\frac{\omega_o}{\text{Arctg} \left(\frac{\omega_c}{\gamma_{\vec{q}}} \right)} - \gamma_{\vec{q}} \right) \quad . \quad (\text{III.9})$$

Dans la mesure où nous avons la condition $\frac{\omega_o}{\gamma_{\vec{q}}} \gg 1$ (c'est-à-dire quand la coupure se produit loin dans les ailes) les relations (III.8) et (III.9) se simplifient :

$$\begin{aligned} (a) \quad \omega_{K_1}(\vec{q}) &\approx \gamma_{\vec{q}} \\ (b) \quad \omega_{\vec{q}}^{(2)} &\approx \frac{2}{\pi} \omega_o \omega_{K_1}(\vec{q}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

La première des relations simplifiées s'explique par le fait que pour une fonction lorentzienne tronquée à une fréquence ω_o très élevée, les résultats relatifs à la fonction lorentzienne restent encore applicables.

La seconde des relations simplifiées montre qu'en première approximation (suivant le terme $\gamma_{\vec{q}}/\omega_o$) le moment d'ordre 2 de la fonction relaxation $\Phi_{\vec{q}}(\omega)$ est proportionnel à la fréquence caractéristique. A la température de Curie T_c où le paramètre K_1 s'annule, la fréquence caractéristique (cf. (I.35)) s'écrit simplement :

$$\omega_{K_1}(\vec{q}) = c q^z \quad (T = T_c) \quad ,$$

et le moment d'ordre 2 $\omega_q^{(2)}$ devient-il ainsi proportionnel au terme q^z . Incidemment remarquons que pour une fonction purement lorentzienne (où $\omega_c \rightarrow \infty$) nous retrouvons à partir de la relation simplifiée (III.9) que le moment d'ordre 2, $\omega_q^{(2)}$, est infini, ce qui est un résultat bien connu.

Supposons que le module du vecteur de diffusion $\vec{q}$ ne varie pas avec la fréquence ω , ce qui est une approximation grossière (approximation quasi-statique, cf. I.I.D) se traduisant par le fait que nous assimilons le module du vecteur de diffusion effectif $q_0^*(\omega)$ à celui du vecteur de diffusion moyen q_0 dans le produit de convolution (II.27). Moyennant cette approximation nous pouvons écrire :

$$M_\sigma^2 \approx \frac{2}{\pi} c \omega_0 q_0^z .$$

Par comparaison avec la formule empirique (III.6) nous identifions ainsi l'exposant b à l'exposant z de la théorie des "lois d'échelle" mais comme nous n'avons pas une connaissance exacte de la valeur de la fréquence de coupure ω_0 il ne nous est pas possible de déduire par notre méthode d'analyse une valeur du facteur de proportionnalité c de celle du coefficient A .

La valeur de l'exposant critique z est égale à $2,51 \pm 0,11$. Cette valeur trouvée par une méthode sur laquelle on peut avoir des réserves est néanmoins en excellent accord avec les valeurs théoriques qui sont :

- (a) $z = 5/2$ d'après les théories microscopiques et la théorie des "lois d'échelle" pour lesquelles nous supposons nul l'exposant de Fisher η ;
- (b) $z = 2,46$ d'après la théorie des "lois d'échelle" appliquée au modèle d'Heisenberg (cf. le tableau III de la première partie).

Notre valeur de l'exposant z est de plus en accord avec les diverses déterminations expérimentales aussi bien sur le fer que sur d'autres substances ferromagnétiques (cf. le tableau III de la première partie).

En fait si on voulait (à présent qu'on connaît la valeur de l'exposant z) obtenir une valeur du facteur c comparable aussi bien à celle obtenue précédemment à partir de la fonction de P. Résibois et C. Piette, qu'à celle trouvée

par J. Als Nielsen ^[34] ($c = 130 \text{ meV } \text{\AA}^{5/2}$) il nous faudrait supposer des valeurs de la fréquence de coupure ω_0 très nettement inférieures à la valeur de la fréquence de coupure ω_c définie à haute température ($T \gg T_c$) (cf. I.III.A : la théorie conventionnelle) : dans le cas du fer l'intégrale d'échange J vaut 8,5 meV et les valeurs à considérer pour ω_0 doivent être de l'ordre de 0,6 meV. On peut penser d'ailleurs que la fréquence de coupure ω_0 soit si petite que la condition $\gamma_q/\omega_0 \ll 1$ devienne elle même caduque, ce qui montre bien les insuffisances théoriques de nos hypothèses de départ.

L'assimilation de la fonction relaxation $\Phi_q(\omega)$ à une lorentzienne tronquée à la température de Curie n'a été suggérée dans un premier temps que par J. Villain ^[18], (encore que la fréquence de coupure ω_0 soit dans ce cas une fonction de module du vecteur $\vec{q}$). Depuis lors ni lui ni P. Résibois et M. De Leener n'ont prévu une telle forme (cf. I.III.D).

CONCLUSION

Toutes les analyses de temps de vol aussi bien celles qu'on effectue à la température de Curie que celles faites dans la phase paramagnétique reposent sur l'approximation que l'intensité des neutrons diffusés recueillis par le canal (n) de l'analyseur s'exprime par le produit de convolution de la section efficace et d'une certaine fonction instrumentale de résolution. Dans l'expression de la section efficace le vecteur de diffusion $\vec{q}$ est remplacé par un vecteur de diffusion effectif $\vec{q}_0^*$ dans lequel on tient compte à la fois de sa dépendance en fonction du changement d'énergie ω et de la variation de l'énergie des neutrons incidents avec l'angle α que fait leur direction de propagation avec l'axe du faisceau incident, variation introduite par le sélecteur mécanique. A aucun moment nous n'avons abordé les problèmes de divergence angulaire sauf en ce qui concerne la divergence angulaire horizontale du faisceau incident mais elle intéresse directement la résolution en énergie. Cette négligence est certainement cause d'erreurs qui sont néanmoins difficiles à déterminer, et au vu des résultats numériques semblent être relativement petites.

La précision des mesures de spectres ne permet pas d'apporter une vérification expérimentale d'une quelconque expression analytique de la section efficace, ceci est tout particulièrement clair en ce qui concerne les mesures faites à la température de Curie T_c . Par contre cette précision paraît suffisante pour tirer à partir des largeurs des spectres des informations quantitatives sur les divers modes de relaxation des fluctuations d'aimantation du voisinage de la température de Curie.

Dans la phase paramagnétique nos expériences ont permis, à la lumière des calculs théoriques de P. Résibois et C. Piette de déterminer la variation de la constante de diffusion Λ avec la température. La variation trouvée confirme les prévisions de la théorie des lois d'échelle. En même temps que ce résultat notre méthode d'analyse numérique des spectres nous permet d'obtenir aussi les variations du paramètre K_1 et de la susceptibilité χ . Ces derniers résultats concordent avec ceux d'expériences antérieures, notamment la variation de la susceptibilité magnétique est sur un large intervalle de température et cela relativement près de la température de Curie, compatible avec les prévisions théoriques et les nombreuses estimations expérimentales. Ainsi cette variation de la susceptibilité χ avec la température constitue-t-elle

à nos yeux un critère de confiance pour ce qui est de la valeur de l'exposant critique ν relatif à la constante de diffusion Λ que nos mesures ont permis de trouver.

Toutefois comme le suggère la courbe de P. Résibois et C. Piette la région hydrodynamique commence vraiment quand la valeur du rapport K_1/q_0 est supérieure à 4, alors que les mesures qui ont servi à la détermination de l'exposant ν correspondent à des valeurs de ce rapport comprises entre 2,4 et 7,1. Nous avons vu cependant que ces mesures compte tenu de leur précision peuvent encore s'interpréter pour les valeurs du rapport K_1/q_0 inférieures à 4, par l'expression parabolique de la fonction d'échelle $f(K_1/q_0)$. En outre les mesures deviennent très difficiles pour les valeurs élevées du rapport en question ; pour les réaliser il faudrait disposer de flux très intenses de neutrons.

Dans la région que nous avons appelée région quasi-hydrodynamique rien n'autorise à supposer que la fonction relaxation $\Phi_q(\omega)$ ne conserve pas la forme lorentzienne caractéristique de la région hydrodynamique. Néanmoins si on désire apporter un raffinement supplémentaire à l'analyse des mesures, il faudrait remplacer dans l'expression lorentzienne, utilisée jusqu'ici pour la fonction relaxation, le terme Λq^2 par l'expression (I.52) de la fréquence caractéristique et où la fonction d'échelle $f(K_1/q)$ aurait la forme calculée par P. Résibois et C. Piette. L'introduction de l'exposant de M.E. Fisher, η , dans la théorie des lois d'échelle modifie seulement l'expression de la susceptibilité χ_q ; elle ne change en rien la forme de la fonction relaxation $\Phi_q(\omega)$ qui reste lorentzienne dans la région hydrodynamique. Mais le fait de négliger dans les analyses la valeur de l'exposant η peut avoir une influence sur la détermination de la variation de la constante de diffusion Λ avec la température, influence qui reste encore inconnue. En conséquence nous pensons que des études ultérieures devraient tenir compte explicitement de l'existence de cet exposant.

- A la température de Curie T_c une méthode d'analyse grossière semblerait indiquer que la fonction relaxation est une lorentzienne tronquée, la fréquence de coupure étant bien inférieure à celle que l'on définit habituellement à température infinie. Compte tenu de cette forme proposée pour la fonction relaxation les résultats expérimentaux s'interprètent bien en considérant que l'exposant z relatif à la fréquence caractéristique $\omega_{K_1}(q)$ dans la région critique prend la valeur $2,51 \pm 0,11$ qui est en excellent accord avec la valeur théorique.

APPENDICE

I - EQUATION INTEGRALE "SELF-CONSISTENTE" DONNANT L'AMORTISSEMENT DES FLUCTUATIONS LONGITUDINALES DE L'AIMANTATION

L'équation d'évolution de la composante longitudinale de $\vec{S}_q(t)$ s'écrit selon le formalisme de Mori [37] :

$$\frac{d}{dt} S_q^0(t) + \int_0^t dt' \Gamma_q(t-t') S_q^0(t') = f_q^0(t) .$$

Cette équation rappelle l'équation de Langevin de la théorie du mouvement brownien :

a) $\Gamma_q(t)$ est un terme d'amortissement.

b) $f_q^0(t)$ est une force aléatoire agissant sur la composante $S_q^0(t)$.

A l'aide du formalisme de Mori nous pouvons exprimer $\Gamma_q(t)$ et $f_q^0(t)$ en fonction de la dérivée à l'instant initial $\dot{S}_q^0$. Tout d'abord définissons l'opérateur de projection $\mathcal{P}_\alpha$ de la façon suivante :

$$\mathcal{P}_\alpha X_q(t) \equiv \frac{(X_q(t), S_q^{\alpha*})}{(S_q^\alpha, S_q^{\alpha*})} S_q^\alpha \quad (\alpha = 0, +, -) \quad (A.1)$$

où X_q est une observable du système.

Alors nous avons les expressions suivantes de $f_q^0(t)$ et $\Gamma_q(t)$:

$$a') \quad f_q^0(t) = e^{t(1-\mathcal{P}_0)i\alpha} (1-\mathcal{P}_0) \dot{S}_q^0$$

$$\text{où : } \dot{S}_q^0 \equiv \dot{S}_q^0(0)$$

$$X_q(t) \equiv e^{it\mathcal{H}} X_q \equiv e^{it\mathcal{H}} X_q e^{-it\mathcal{H}} \quad (\hbar = 1)$$

$$b') \quad \Gamma_q(t) = \frac{(f_q^0(t), f_q^{\alpha*})}{(S_q^\alpha, S_q^{\alpha*})} = \frac{N}{(g\mu_B)^2} \frac{1}{\chi_q^0} (f_q^0(t), f_q^{\alpha*})$$

Il apparait que la force aléatoire $f_q^0(t)$ reste toujours orthogonale à S_q^0 :

$$(f_q^0(t), S_q^{0*}) = 0 \quad .$$

De cette propriété d'orthogonalité nous déduisons l'équation d'évolution suivante de la fonction relaxation $\varphi_q^0(t)$:

$$\frac{d}{dt} \varphi_q^0(t) + \int_0^t dt' \Gamma_q(t-t') \varphi_q^0(t') = 0 \quad .$$

A présent introduisons les transformées de Laplace des fonctions $\varphi_q^0(t)$, $\Gamma_q(t)$ et $\psi_q^0(t)$, cette dernière étant égale à la fonction relaxation des "vitesses" :

$$\psi_q^0(t) = \frac{N}{(g\mu_B)^2} \frac{1}{\chi_q^0} (S_q^0(t), \dot{S}_q^{0*}) \quad .$$

Les transformées de Laplace $\hat{\varphi}_q^0(z)$, $\hat{\Gamma}_q(z)$ et $\hat{\psi}_q^0(z)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_q^0(z) &= \int_0^\infty dt e^{-zt} \varphi_q^0(t) \\ \hat{\Gamma}_q(z) &= \int_0^\infty dt e^{-zt} \Gamma_q(t) \\ \hat{\psi}_q^0(z) &= \int_0^\infty dt e^{-zt} \psi_q^0(t) \quad . \end{aligned}$$

Entre les diverses transformées de Laplace existent les relations générales :

$$\hat{\varphi}_q^0(z) = \frac{1}{z + \hat{\Gamma}_q(z)} \quad (A.2)$$

$$\hat{\psi}_q^0(z) = \frac{\hat{\Gamma}_q(z)}{1 + \frac{1}{z} \hat{\Gamma}_q(z)} \quad (A.3)$$

On montre que le comportement "aux temps longs" de la fonction relaxation $\varphi_q^0(t)$ est obtenu pour les "petites" valeurs de $|z|$. En particulier on retrouve les résultats de la théorie conventionnelle si le terme d'amortissement $\Gamma_q(t)$ s'annule au bout d'un temps fini. Quand le système ferromagnétique

est décrit par l'hamiltonien d'Heisenberg (I.5) nous savons qu'il n'est pas ainsi ^[17] ; dans ce cas Kawasaki montre que la transformée de Laplace $\hat{\Gamma}_{\vec{q}}^{\rightarrow}(z)$ du terme d'amortissement $\Gamma_{\vec{q}}^{\rightarrow}(t)$ est déterminée par une "équation self-consistent" ^{[17][28]} .

Dans le cas de l'hamiltonien d'Heisenberg (I.5) l'équation d'évolution de la composante longitudinale $S_{\vec{q}}^0(t)$ s'écrit :

$$\dot{S}_{\vec{q}}^0(t) = - \frac{i}{N} \sum_{\vec{q}'} J(\vec{q}', \vec{q}-\vec{q}') S_{\vec{q}'}^+(t) S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-(t) \quad (h = 1)$$

La fonction $\hat{\Psi}_{\vec{q}}^0(z)$ s'exprime alors comme la transformée de Laplace d'une fonction de Kubo à "4 corps" :

$$\hat{\Psi}_{\vec{q}}^0(z) = \frac{(g\mu_B)^2}{N^3} \sum_{\vec{q}'} \sum_{\vec{q}''} J(\vec{q}', \vec{q}-\vec{q}') J(\vec{q}'', \vec{q}-\vec{q}'') \frac{1}{\chi_{\vec{q}}^0} \int_0^{\infty} dt e^{-zt} (S_{\vec{q}'}^+(t) S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-(t), S_{\vec{q}''}^+(t) S_{\vec{q}-\vec{q}''}^-(t))$$

On peut toujours écrire les composantes transversales $S_{\vec{q}'}^+(t)$ et $S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-(t)$ sous la forme :

$$S_{\vec{q}'}^+(t) \equiv \mathcal{P}_+ S_{\vec{q}'}^+(t) + (1-\mathcal{P}_+) S_{\vec{q}'}^+(t)$$

$$S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-(t) \equiv \mathcal{P}_- S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-(t) + (1-\mathcal{P}_-) S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-(t) .$$

Compte tenu de la définition (A.1) des opérateurs de projection $\mathcal{P}_+$ et $\mathcal{P}_-$ les identités ci-dessus s'écrivent :

$$S_{\vec{q}'}^+(t) = \varphi_{\vec{q}'}^+(t) S_{\vec{q}'}^+ + (1-\mathcal{P}_+) S_{\vec{q}'}^+(t)$$

$$S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-(t) = \varphi_{\vec{q}-\vec{q}'}^-(t) S_{\vec{q}-\vec{q}'}^- + (1-\mathcal{P}_-) S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-(t) .$$

Ainsi n'importe quelle composante $S_{\vec{q}}^{\alpha}(t)$ ($\alpha = 0, +, -$) peut-elle s'écrire sous la forme d'une somme de deux termes :

a") Le premier terme $\varphi_{\vec{q}}^{\alpha}(t) S_{\vec{q}}^{\alpha}$ dont l'évolution au cours du temps est essentiellement déterminée par la variation de la fonction relaxation $\varphi_{\vec{q}}^{\alpha}(t)$.

b'') Le second terme $(1-\mathcal{P}_\alpha) S_{\vec{q}}^\alpha(t)$ dont l'évolution, selon le formalisme de Mori, est purement aléatoire.

Les termes $\varphi_{\vec{q}}^\alpha(t) S_{\vec{q}}^\alpha$ et $(1-\mathcal{P}_\alpha) S_{\vec{q}}^\alpha(t)$ traduisent respectivement l'existence de processus coopératifs et de processus aléatoires. La cohabitation de ces deux processus à toute température rend difficile l'étude de la relaxation magnétique critique comme l'a souligné Villain^[25]. Au voisinage de la température de Curie les processus coopératifs deviennent prédominants. Cette prédominance se manifeste par l'existence de fluctuations d'aimantation qui relaxent lentement et s'étendent à des distances de l'ordre de plusieurs dizaines de fois la distance interatomique. Aussi pouvons-nous négliger les contributions provenant des processus aléatoires dans la fonction $\hat{\psi}_{\vec{q}}^\alpha(z)$ tant que nous limitons l'étude de celle-ci aux valeurs des modules des vecteurs d'ondes $\vec{q}$ et $\vec{q}'$ petites devant les dimensions de la première zone de Brillouin et au voisinage de la valeur zéro du module $|z|$:

$$\hat{\psi}_{\vec{q}}^\alpha(z) \approx \frac{(g\mu_B)^2}{N^3} \sum_{\vec{q}'}' \sum_{\vec{q}''} J(\vec{q}', \vec{q}-\vec{q}') J(\vec{q}'', \vec{q}-\vec{q}'') \frac{1}{\chi_{\vec{q}}^0}$$

$$(S_{\vec{q}}^+, S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-, S_{\vec{q}''-\vec{q}}^+ S_{-\vec{q}''}^-) \int_0^\infty dt e^{-zt} \varphi_{\vec{q}}^+(t) \varphi_{\vec{q}-\vec{q}'}^-(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T \sim T_c \\ |\vec{q}|, |\vec{q}'| \rightarrow 0 \\ |z| \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

Dans cette expression approchée le symbole $\sum_{\vec{q}'}'$ signifie qu'on effectue la somme uniquement sur les "petites valeurs" de $\vec{q}'$.

A l'aide d'une approximation de découplage ("Random Phase Approximation") nous ramenons la fonctions de Kubo à "4 corps" $(S_{\vec{q}}^+, S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-, S_{\vec{q}''-\vec{q}}^+ S_{-\vec{q}''}^-)$ à un produit de deux fonctions de Kubo à "2 corps" :

(i) Tout d'abord remarquons qu'à haute température :

$$\langle S_{\vec{q}}^+, S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-, S_{\vec{q}'}^-, S_{-\vec{q}'}^- \rangle \approx \frac{1}{k_B T} \langle S_{\vec{q}}^+, S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-, S_{\vec{q}'}^+, S_{-\vec{q}'}^- \rangle .$$

(ii) L'approximation du découplage consiste à écrire :

$$\langle S_{\vec{q}}^+, S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-, S_{\vec{q}'}^+, S_{-\vec{q}'}^- \rangle \approx \langle S_{\vec{q}}^+, S_{-\vec{q}'}^- \rangle \langle S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-, S_{\vec{q}'}^+ \rangle \delta_{\vec{q}, \vec{q}'} .$$

Nous avons supposé en plus en écrivant la relation ci-dessus que les composantes $S_{\vec{q}}^\alpha$ étaient des grandeurs classiques et qu'en conséquence on pouvait se livrer à des commutations dans le produit $\langle S_{\vec{q}}^+, S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-, S_{\vec{q}'}^+, S_{-\vec{q}'}^- \rangle$.

(iii) Après s'être rappelé que :

$$S_{\vec{q}}^{\alpha*} = S_{-\vec{q}}^{-\alpha} \quad (\text{cf. I.I.F})$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \langle S_{\vec{q}}^+, S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-, S_{\vec{q}'}^+, S_{-\vec{q}'}^- \rangle &\approx \frac{1}{k_B T} \langle S_{\vec{q}}^+, S_{\vec{q}'}^{+*} \rangle \langle S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-, S_{\vec{q}-\vec{q}'}^{*-} \rangle \delta_{\vec{q}, \vec{q}'} \\ &\approx \frac{1}{k_B T} k_B T (S_{\vec{q}}^+, S_{\vec{q}'}^{+*}) k_B T (S_{\vec{q}-\vec{q}'}^-, S_{\vec{q}-\vec{q}'}^{*-}) \delta_{\vec{q}, \vec{q}'} \\ &\approx k_B T \frac{N^2}{(g\mu_B)^4} \chi_{\vec{q}}^+ \chi_{\vec{q}-\vec{q}'}^- \delta_{\vec{q}, \vec{q}'} . \end{aligned}$$

Kawasaki [17] [28] et Villain [18] [25] pensent que l'approximation du découplage se justifie près de T_c . Au-dessus de la température de Curie où nous avons les relations :

$$\chi_{\vec{q}}^{\pm} = 2 \chi_{\vec{q}}^0, \quad \varphi_{\vec{q}}^{\alpha}(t) = \varphi_{\vec{q}}^0(t) \quad \forall \alpha$$

la fonction $\hat{\psi}_{\vec{q}}^0(z)$ devient :

$$\hat{\psi}_{\vec{q}}^0(z) \approx \frac{4k_B T}{N} \frac{1}{(g\mu_B)^2} \sum_{\vec{q}'} |J(\vec{q}', \vec{q}-\vec{q}')|^2 \frac{\chi_{\vec{q}'}^0 \chi_{\vec{q}-\vec{q}'}^0}{\chi_{\vec{q}}^0} \int_0^\infty dt e^{-zt} \varphi_{\vec{q}'}^0(t) \varphi_{\vec{q}-\vec{q}'}^0(t) .$$

cette dernière expression peut encore être modifiée :

a''') dans le cadre de l'approximation de Ornstein-Zernike où pour les petits vecteurs $\vec{q}$ et $\vec{q}'$ les expressions des susceptibilités $\chi_{\vec{q}'}^0$, $\chi_{\vec{q}-\vec{q}'}^0$ et $\chi_{\vec{q}}^0$ sont déduites de la formule de Ornstein-Zernike (I.19).

b''') Si on écrit pour les petits vecteurs $\vec{q}$ et $\vec{q}'$ $J(\vec{q}', \vec{q}-\vec{q}')$ sous la forme approchée :

$$J(\vec{q}', \vec{q}-\vec{q}') \approx \frac{1}{6} \mathcal{J}^{(2)} (q^2 - 2\vec{q} \cdot \vec{q}')$$

$\mathcal{J}^{(2)}$ est le moment d'ordre 2 de l'intégrale d'échange, il est donné par la relation (I.17). En se rappelant que le paramètre r_1^2 est donné par la relation (I.20) la fonction $\hat{\psi}_{\vec{q}}^0(z)$ s'écrit finalement :

$$\hat{\psi}_{\vec{q}}^0(z) \approx \frac{1}{3} \frac{k_B T}{N} \mathcal{J}^{(2)} \sum_{\vec{q}'} (q^2 - 2\vec{q} \cdot \vec{q}')^2 \frac{K_1^2 + q^2}{(K_1^2 + q'^2)(K_1^2 + (\vec{q} - \vec{q}')^2)} \int_0^\infty dt e^{-zt} \varphi_{\vec{q}}^0(t) \varphi_{\vec{q}-\vec{q}'}^0(t) .$$

Nous pouvons encore écrire l'expression ci-dessus en fonction des transformées de Laplace des fonctions relaxations $\varphi_{\vec{q}}^0(t)$ et $\varphi_{\vec{q}-\vec{q}'}^0(t)$, après l'intégration sur le temps t nous obtenons :

$$\hat{\psi}_{\vec{q}}^0(z) \approx \frac{1}{3} \frac{k_B T}{N} \mathcal{J}^{(2)} \sum_{\vec{q}'} (q^2 - 2\vec{q} \cdot \vec{q}')^2 \frac{K_1^2 + q^2}{(K_1^2 + q'^2)(K_1^2 + (\vec{q} - \vec{q}')^2)} \times \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz_1 \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz_2$$

$$\frac{1}{z - z_1 - z_2} \hat{\varphi}_{\vec{q}}^0(z_1) \hat{\varphi}_{\vec{q}-\vec{q}'}^0(z_2) .$$

A présent si nous tenons compte des relations générales (A.2) et (A.3) nous aboutissons à une équation "self-consistent" donnant $\hat{\Gamma}_{\vec{q}}(z)$:

$$\frac{\hat{\Gamma}_{\vec{q}}(z)}{1 + \frac{1}{z} \hat{\Gamma}_{\vec{q}}(z)} \approx \frac{1}{3} \frac{k_B T}{N} \mathcal{J}^{(2)} \sum_{\vec{q}'} (q^2 - 2\vec{q} \cdot \vec{q}')^2 \frac{K_1^2 + q^2}{(K_1^2 + q'^2)(K_1^2 + (\vec{q} - \vec{q}')^2)} \times \frac{1}{(2\pi i)^2}$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dz_1 \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz_2 \frac{1}{z - z_1 - z_2} \frac{1}{z_1 + \hat{\Gamma}_{\vec{q}}(z_1)} \frac{1}{z_2 + \hat{\Gamma}_{\vec{q}-\vec{q}'}(z_2)} . \quad (A.4)$$

Cette expression très compliquée n'est valable :

a''''') qu'au voisinage immédiat de la température de Curie, plus exactement pour $T \rightarrow T_{c+}$

b''') qu'aux petites valeurs des vecteurs $\vec{q}$ et $\vec{q}'$

c''') qu'au voisinage de la valeur zéro du module $|z|$.

En fait tant que nous ne quittons pas le voisinage de la température de Curie nous pourrions dans les applications de la formule (A.4) remplacer la somme "tronquée" $\sum_{\vec{q}'}^{'}$ par l'intégrale $\frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{q}'$ où V est le volume du système.

Nous pouvons mettre facilement $\hat{\Gamma}_{\vec{q}}(z)$ sous la forme suivante :

$$\hat{\Gamma}_{\vec{q}}(z) = \mu K_1^{5/2} F\left(\frac{\vec{q}}{K_1}, \frac{z}{\mu K_1^{5/2}}\right) \quad (A.5)$$

$$\mu = \left[\frac{k_B T \mathcal{J}^{(2)} V}{3N} \right]^{1/2}$$

où :

et où la fonction $F(\vec{\rho}, \xi)$ s'écrit :

$$F(\vec{\rho}, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{\rho}' (\rho'^2 - 2\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}') \frac{1+\rho'^2}{(1+\rho'^2)(1+(\vec{\rho}-\vec{\rho}')^2)} \times \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\xi_1 \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\xi_2$$

$$\frac{1}{\xi - \xi_1 - \xi_2} \frac{1}{\xi_1 + F(\vec{\rho}', \xi_1)} \frac{1}{\xi_2 + F(\vec{\rho} - \vec{\rho}', \xi_2)} \quad (A.6)$$

II - ESTIMATION DU TERME D'AMORTISSEMENT DANS LA REGION HYDRODYNAMIQUE

La fonction sans dimension $F(\vec{\rho}, \xi)$ est donnée par une équation intégrale de type "self-consistent" (A.6) qui n'a pas encore été résolue dans le cas général. Dans la région hydrodynamique où nous avons la condition $|\vec{\rho}| \ll 1$, Kawasaki a trouvé que la fonction $F(\vec{\rho}, \xi)$ varie en ρ^2 * :

$$F(\vec{\rho}, \xi) = d(\xi) \rho^2 + \dots$$

*Ce résultat de Kawasaki semble raisonnable compte tenu de l'existence du freinage cinématique dans les ferromagnétiques.

Comme le coefficient $d(\xi)$ conserve une valeur finie d_0 quand ξ tends vers zéro, nous obtenons pour le terme d'amortissement $\hat{\Gamma}_q(z=0_+)$ l'expression

$$\hat{\Gamma}_q(z=0_+) \approx \mu d_0 K_1^{1/2} q^2 \quad (A.7)$$

dans la région hydrodynamique. Ce terme d'amortissement peut être identifié à l'inverse d'un temps de relaxation τ_q qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\tau_q} \approx \frac{N}{(g\mu_B)^2} \frac{1}{\chi_q^0} \int_0^\infty dt (f_q^0(t), f_q^{0*}) .$$

Remarquons la forte analogie avec la formule (I.28) de la théorie conventionnelle où l'on n'a fait que remplacer $\dot{S}_q^0$ par la force aléatoire f_q^0 . Dans la région hydrodynamique la relaxation est exponentielle et nous pouvons mettre en évidence une constante de diffusion Λ définie à partir de (A.7) :

$$\Lambda \approx \mu d_0 K_1^{1/2} .$$

Nous retrouvons donc le résultat (I.53) de la théorie des lois d'échelle dans le cas où l'exposant de Fisher η est nul.

III - SITUATION A LA TEMPERATURE DE CURIE

A la température de Curie Kawasaki^[28] ne donne que des arguments d'ordre qualitatif. A la température de Curie le paramètre K_1 s'annule et comme le terme d'amortissement $\hat{\Gamma}_q(z)$ reste fini à cette température pour $|\vec{q}|$ et $|z|$ différents de zéro, il ne doit plus figurer dans le côté droit de l'égalité (A.5) de paramètre K_1 . Kawasaki^[28] propose donc pour $\hat{\Gamma}_q(z)$ la forme suivante :

$$\hat{\Gamma}_q(z) \approx z G \left(\frac{z}{\mu q^{5/2}} \right)$$

à la température de Curie.

Le fait que nous identifions toujours le temps de relaxation τ_q à $\hat{\Gamma}_q(z=0_+)$ impose que pour $z \rightarrow 0$ la fonction $G\left(\frac{z}{\mu q^{5/2}}\right)$ varie comme $\frac{\mu q^{5/2}}{z}$. En conséquence nous voyons émerger dans la région critique un temps de relaxation τ_q proportionnel à $q^{-5/2}$.

REFERENCES

- [1] - O. HALPERN and M.H. JOHNSON - Phys. Rev. (1939), 55, 898
- [2] - L. VAN HOVE - Phys. Rev. (1954), 95, 1374
- [3] - P.G. DE GENNES - "Magnetism" G.T. Rado and Suhl, vol.III, p.15
- [4] - R. KUBO - Journal of the Physical. Soc. of Japan 12, 570 (1957)
- [5] - H. MORI and K. KAWASAKI - Prog. Theor. 27, 529 (1962)
- [6] - J. VILLAIN - J. Phys. 25, 618 (1964)
W. MARSHALL and R. LOWDE - Rept on Progress Physics 21, 705 (1968)
- [7] - H. PALEVSKY and D.J. HUGHES - Phys. Rev. (1956), 92, 202
- [8] - G.L. SQUIRES - Proc. Phys. Soc. (1954), 67, 248
- [9] - H.H. BOGOLIUBOV and C.B. TYABLIKOV - Doklady Akad.Nauk.USSR,126,53 (1959)
- [10] - L.S. ORNSTEIN and F. ZERNIKE - Phys. Z. (1918), 19, 134
- [11] - J.L. GAMMEL, W. MARSHALL and L. MORGAN - Proc. Phys. Soc. A275, 257 (1963)
- [12] - M.E. FISHER and R. BURFORD - Phys. Rev. (1967), 156, 583
- [13] - M.E. FISHER - NBS Miscellaneous Publ. 273 (1966), p.108
Rept.on Progress in Physics vol.XXX (1967), 615
- [14] - B. JACROT, J. KONSTANTINOVIC, G. PARETTE and D. CRIBIER - (1963)
"Inelastic Scattering of neutrons in Solids and Liquids" vol.2 (Vienna IAEA) p.317
- [15] - L. PASSEL, K. BLINOWSKI, T. BRUN and P. NIELSEN - Phys. Rev. (1965),
139, A 1866
- [16] - W. MARSHALL - NBS Miscel. Publ.(US) 273, (1966) p.135
- [17] - K. KAWASAKI - J. Phys. Chem. Solids 28, 1277 (1967)
- [18] - J. VILLAIN - Phys. Status Solidi 19, (1967) 767
Journal Phys. 29, 321 (1968)
- [19] - P. RESIBOIS and M. De LEENER - Phys. Letters 25A, 65 (1967)
- [20] - B.I. HALPERIN and P.C. HOHENBERG - Phys. Rev. Letters 29, (1967) 700
Phys. Rev. 177, 952 (1969)

- [21] - M.F. COLLINS, V.J. MINKIEWICZ, R. NATHANS, L. PASSEL and G. SHIRANE - Phys. Rev. 179, 417 (1969)
- [22] - V.J. MINKIEWICZ, M.F. COLLINS, R. NATHANS and G. SHIRANE - Phys. Rev. 182, 624 (1969)
- [23] - V.J. MINKIEWICZ - Rapport B.N.L. 14914 (1970)
- [24] - P.G. De GENNES - Rapport C.E.A. n° 925 (1959)
- [25] - J. VILLAIN - Thèse, Paris (1967)
- [26] - P.G. de GENNES and J. VILLAIN - J. Phys. Chem. Solids 13, 10 (1960)
- [27] - B.I. HALPERIN and P.C. HOHENBERG - Phys. Rev. 188, 898 (1969)
- [28] - K. KAWASAKI - Prog. Theor. Physics 39, 285 (1968)
- [29] - J. VILLAIN - Communication au C.M.I.G. (1970)
- [30] - L.P. KADANOFF and J. SWIFT - Phys. Rev. 166, 89 (1968)
- [31] - P. RESIBOIS and C. PIETTE - Phys. Rev. Letters (1970), 24, 514
- [32] - L.P. KADANOFF et al - Rev. Mod. Phys. 39, (1967), 395
Dans cet article de revue figure un grand nombre de déterminations expérimentales de grandeurs physiques telles la susceptibilité, la chaleur spécifique,... . On pourra y consulter les références utiles.
- [33] - V.J. MINKIEWICZ, K. GESI and E. HIRAHARA - Conference on magnetism, magnetic materials, Miami, Florida (USA) 16-20 November 1970
- [34] - J. ALS-NIELSEN - Phys. Rev. Letters (1970) 25, 730
- [35] - P. HELLER - Rept. on Progress in Physics vol. XXX (1967)
Rept. on Progress in Physics, 30, Part.II, 806 (1967)
- [36] - H.Y. LAU, L.M. CORLISS, A. DELAPALME, J.M. HASTINGS, R. NATHANS and A. TUCCIARONE - Phys. Rev. Letters 23, 1225 (1969)
- [37] - H. MORI - Prog. Theor. Phys. 33, 423 (1965)
- [38] - G. GOBERT et B. JACROT - J. Phys. Radium (1958), 19A, 51
- [39] - M. TOURNARIE - Journal de Physique (1969), 30, 737
- [40] - D. BALLY, B. GRABCEV, M. POPOVICI, M. TOTIA and A.M. LUNGU - J. Appl. Phys. 39, 459 (1968)

- [41] - D. BALLY, B. GRABCEV, A.M. LUNGU, M. POPOVICI and M. TOTIA - J. Phys. Chem. Solids 28, 1947 (1967)
- [42] - D. BALLY, M. POPOVICI, M. TOTIA, B. GRABCEV and A.M. LUNGU - IAEA "Neutron Inelastic Scattering" Copenhagen, vol. II, p.75 (1968)
- [43] - Communication privée du D. TOTIA - Nous remercions le D. M. TOTIA pour les discussions que nous avons eues avec elle et la communication des ses travaux avant publication.

Manuscrit reçu le 6 octobre 1971

LEGENDE DES FIGURES

- Figure 1 - Variation des fonctions relaxation en fonction de la fréquence ω pour un vecteur $\vec{q}$ de petite dimension devant les dimensions de la première zone de Brillouin quand la température T est très éloignée de la température de Curie T_c :
- (a) dans la région des ondes de spin
 - (b) à très haute température.
- Figure 2 - $\frac{1}{2}$ plan (q, ξ^{-1}) où sont représentées les diverses régions asymptotiques :
- (I) région hydrodynamique des ondes de spin
 - (II) région critique
 - (III) région hydrodynamique où existe une constante de diffusion.
- Figure 3 - Variation de la fonction de corrélation $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$ avec la fréquence ω prévue par les hypothèses de lois d'échelle de Halperin et Hohenberg [20] :
- (a) dans la région hydrodynamique (I)
 - (b) dans la région hydrodynamique (II).
- Figure 4 - Fonction "d'échelle" $f(K_1/q)$ calculée par P. Résibois et C. Piette. En trait discontinu nous avons représenté l'expression asymptotique de cette fonction valable dans la région "hydrodynamique".
- Figure 5 - Formes possibles de la fonction relaxation $\Phi_q^0(\omega)$ et de la fonction $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$:
- (a) forme prévue par la théorie de Résibois et De Leener [19] dans la région critique (II)
 - (b) forme de $C_{\xi}^{\vec{M}}(\vec{q}, \omega)$ observée à $T=T_c$ dans l'antiferromagnétique $RbMnF_3$ [36].
- Figure 6 - Coupe verticale du four
- 1 - Echantillon
 - 2 - Cylindre de fer Armco évidé sauf en sa partie centrale (qui constitue l'échantillon 1)
 - 3 - Position de la soudure chaude du thermocouple chromel-Alumel de mesure

- 4 - Position de la soudure chaude du thermocouple chromel-Alumel de régulation
- 5 - Tube en B_4C (absorbant de neutrons)
- 6 - Thermocoups chauffant
- 7 - Feutre de silice
- 8 - Support d'écrans en céramique
- 9 - Ecrans thermiques latéraux en molybdène
- 10 - Cales (inox)
- 11 - Sortie vers la pompe à vide (vide secondaire)
- 12 - Axe du faisceau des neutrons incidents
- 13 - "Fenêtres" pour les neutrons (0,5 mm d'aluminium).

Figure 7 - Vue du four. On peut distinguer au premier plan les sorties du thermocoups chauffant et des 2 thermocouples. On peut aussi remarquer la "fenêtre" centrale par laquelle pénètre le flux des neutrons incidents. On fait le vide à l'intérieur du four par l'orifice latéral. A l'arrière plan figure les tuyaux de refroidissement.

Figure 8 - Vue schématique du sélecteur mécanique de Gobert et Jacrot^[38].

Figure 9 - Schéma de principe du dispositif expérimental.

Figure 10 - Vues schématiques du trajet d'un faisceau de neutrons se propageant à travers le sélecteur mécanique suivant une direction commune faisant l'angle α avec l'axe incident.

Figure 11 - Figures de transmission des 2 disques du sélecteur mécanique.

Figure 12 - Variation expérimentale de la position du maximum $n_o(\alpha)$ en fonction de l'angle α . La pente de la droite est égale à $a' : a' = -1,0583$ canal/minute d'angle.

Figure 13 - Variation expérimentale du moment d'ordre $2v^2$ en fonction de l'angle α .

Figure 14 - Variation de l'énergie E du neutron en fonction du temps de vol τ de celui-ci.

Figure 15 - Schéma de principe de la diffusion. Nous avons tracé aussi les courbes gaussiennes d'équations :

$$(a) \quad e^{-\frac{(\alpha - \alpha_E)^2}{2(\Delta\alpha)^2}}$$

$$(b) \quad \exp \left\{ -\frac{(E - E_0)^2}{2[(\Delta E)^2 + a^2 \eta^2]} \right\}.$$

Figure 16 - Variation du module du vecteur $\vec{q}_{\epsilon_n + \omega, \epsilon_n}$ en fonction du changement d'énergie ω pour 3 valeurs différentes du numéro de canal de l'analyseur.

Figure 17 - Construction du vecteur de diffusion effectif $\vec{q}_0^*(\omega)$.

Figure 18 - Variation de l'intensité des neutrons diffusés à angle de diffusion θ_s fixe ($q_0 = 0,027 \text{ \AA}^{-1}$) en fonction de la température. Le maximum correspond à la température de Curie T_c .

Figure 19 - Domaine du $\frac{1}{4}$ plan (q, K_1) intéressé par les mesures.

Figure 20 - Comparaison entre les formes des spectres incident et diffusé. Le spectre incident est représenté en trait discontinu et le spectre diffusé par les cercles $\circ$. Le spectre diffusé choisi correspond à la valeur minimum de q_0 : $q_0 = 0,0196 \text{ \AA}^{-1}$ et à une température pour laquelle $\Lambda = 16 \text{ MeV \AA}^2$.

Figure 21 - Détermination des paramètres K_1^2 et Λ à la température définie par :

$$\frac{T - T_c}{T_c} = 0,01837$$

● Λ

○ K_1^2

La droite horizontale en trait discontinu correspond à la valeur $K_1^2 = 0,00695 \text{ \AA}^{-2}$.

Figure 22 - Variation de la susceptibilité et du paramètre K_1^2 avec la température dans la région "quasi-hydrodynamique"

$$\frac{T_c}{T} \quad N \propto \chi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad K_1^2 \\ \Delta \text{ valeur de } K_1^2 \text{ déterminée à la température } \frac{T-T_c}{T_c} = 0,01837. \\ \text{(cf. fig. 21)} \end{array} \right.$$

Figure 23 - Variation du paramètre Λ avec la température dans la région "quasi-hydrodynamique".

Figure 24 - Vérification expérimentale de la forme théorique de la fonction "d'échelle" calculée par P. Résibois et C. Piette. Mise en évidence de la région "quasi-hydrodynamique".

Les cercles blancs $\circ$ correspondent aux mesures des paramètres K_1^2 et Λ effectuées à $q_0 = 0,043$ et $q_0 = 0,0495 \text{ Å}^{-1}$.

Les carrés blancs $\square$ correspondent aux mesures des paramètres K_1^2 et Λ faites à la température définie par :

$$\frac{T-T_c}{T_c} = 0,01837 .$$

Les cercles noirs $\bullet$ correspondent à l'analyse qu'a faite J. Als-Nielsen ^[34] à partir des résultats expérimentaux de M.F. Collins ^[21].

En trait continu nous avons tracé la courbe de variation de la fonction "d'échelle" calculée par P. Résibois et C. Piette et en trait discontinu la courbe de variation de l'expression asymptotique de cette fonction.

Figure 25 - Estimations du paramètre Λ

a) $q_0 = 0,0196 \text{ Å}^{-1}$

c) $q_0 = 0,043 \text{ Å}^{-1}$

b) $q_0 = 0,0264 \text{ Å}^{-1}$

d) $q_0 = 0,0495 \text{ Å}^{-1}$

Les cercles noirs $\bullet$ des figures (c) et (d) correspondent aux estimations de Λ dans les cas où K_1^2 est aussi considérée comme une inconnue à déterminer (cf. la figure (23)).

Figure 26 - Vérification expérimentale de la forme de la fonction "d'échelle" calculée par P. Résibois et C. Piette dans le cas où $K_1^2 \eta$ n'est plus considéré comme une inconnue.

- ⊙ $q_o = 0,0495 \text{ Å}^{-1}$
- $q_o = 0,043 \text{ Å}^{-1}$
- $q_o = 0,0264 \text{ Å}^{-1}$
- ⦿ $q_o = 0,0196 \text{ Å}^{-1}$.

Figure 27 - Valeurs de la quantité $\frac{T_c}{T} N$ portées en fonction de l'écart relatif de température $\frac{T-T_c}{T_c}$. Ces valeurs sont déterminées en supposant que la variation avec la température du paramètre K_1^2 est donnée par la loi (III.2) :

$$K_1^2 = 3,36 \left(\frac{T-T_c}{T_c} \right)^{1,55}$$

- $q_o = 0,0495 \text{ Å}^{-1}$
- $q_o = 0,043 \text{ Å}^{-1}$
- $q_o = 0,0264 \text{ Å}^{-1}$
- $q_o = 0,0196 \text{ Å}^{-1}$ (seulement dans la région hydrodynamique).

Figure 28 - Variation du paramètre Λ avec la température dans la région "hydrodynamique".

Figure 29 - Divers résultats expérimentaux concernant la variation du paramètre K_1^2 avec la température.

- Bally et al. [41] $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ avec corrections d'inélasticité} \\ \circ \text{ approximation statique} \end{array} \right.$
- Bally et al. [40] ----- avec correction introduite par une valeur non nulle de l'exposant de Fisher η .
- Passel et al. [15] $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ avec corrections d'inélasticité} \\ \blacksquare \text{ avec corrections d'inélasticité et celle introduite par une valeur non nulle de l'exposant de Fisher } \eta \end{array} \right.$
- M.F. Collins et al. [21] Δ
- B. Jacrot et al. [14] avec corrections d'inélasticité.

Nos résultats.

Figure 30 - Variation en fonction du vecteur de diffusion $\vec{q}_0$ de la différence des moments d'ordre deux du spectre observé à la température de Curie et du spectre incident.

Figure 1

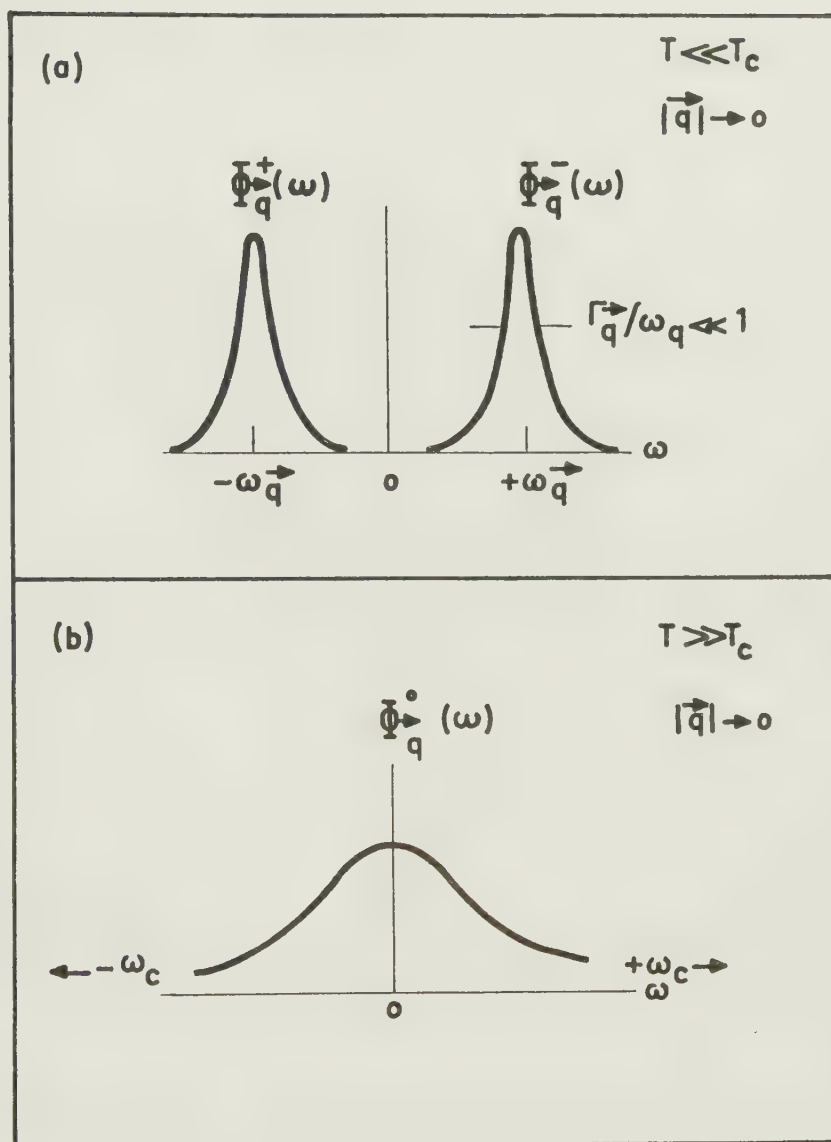


Figure 2

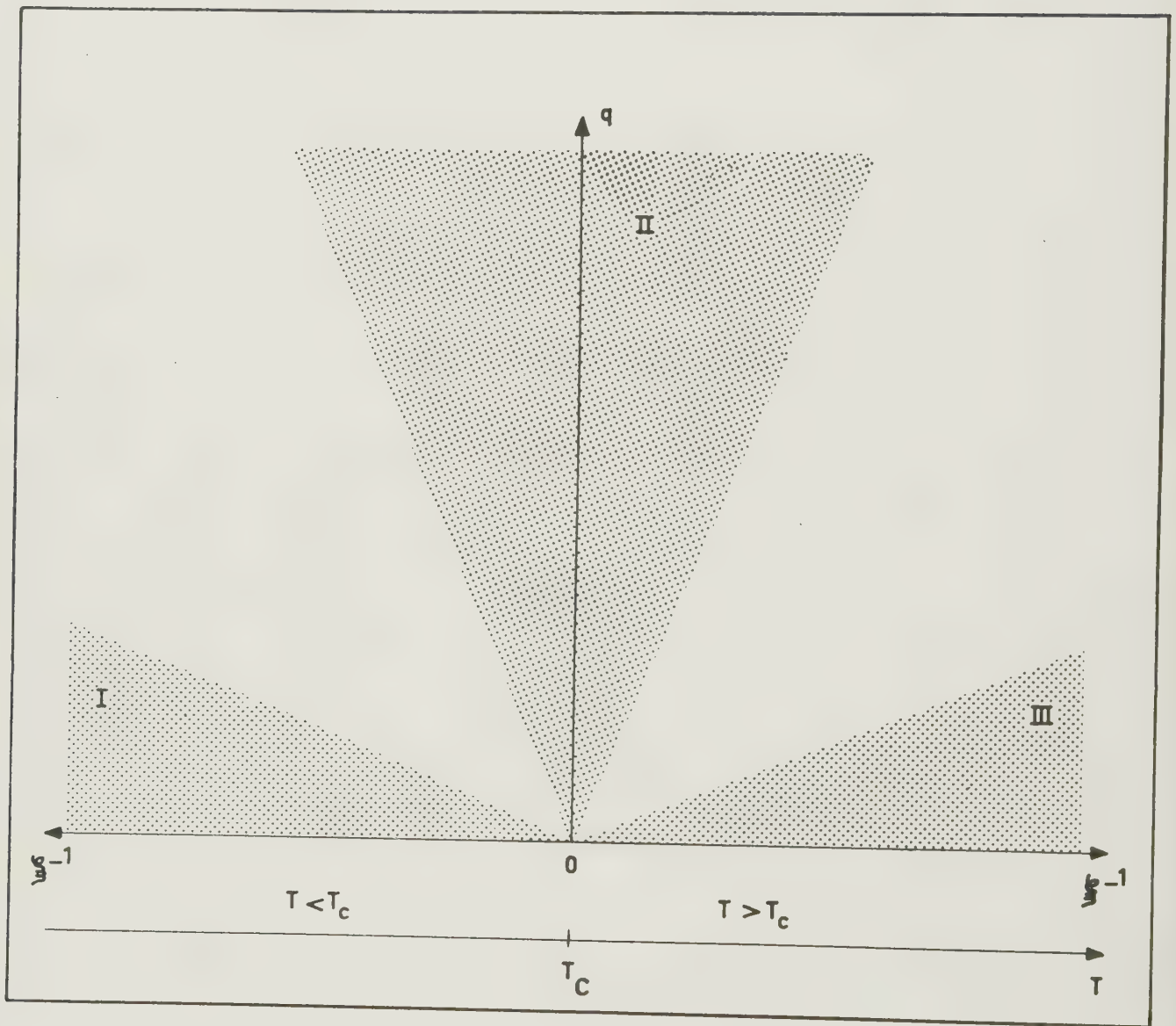


Figure 3

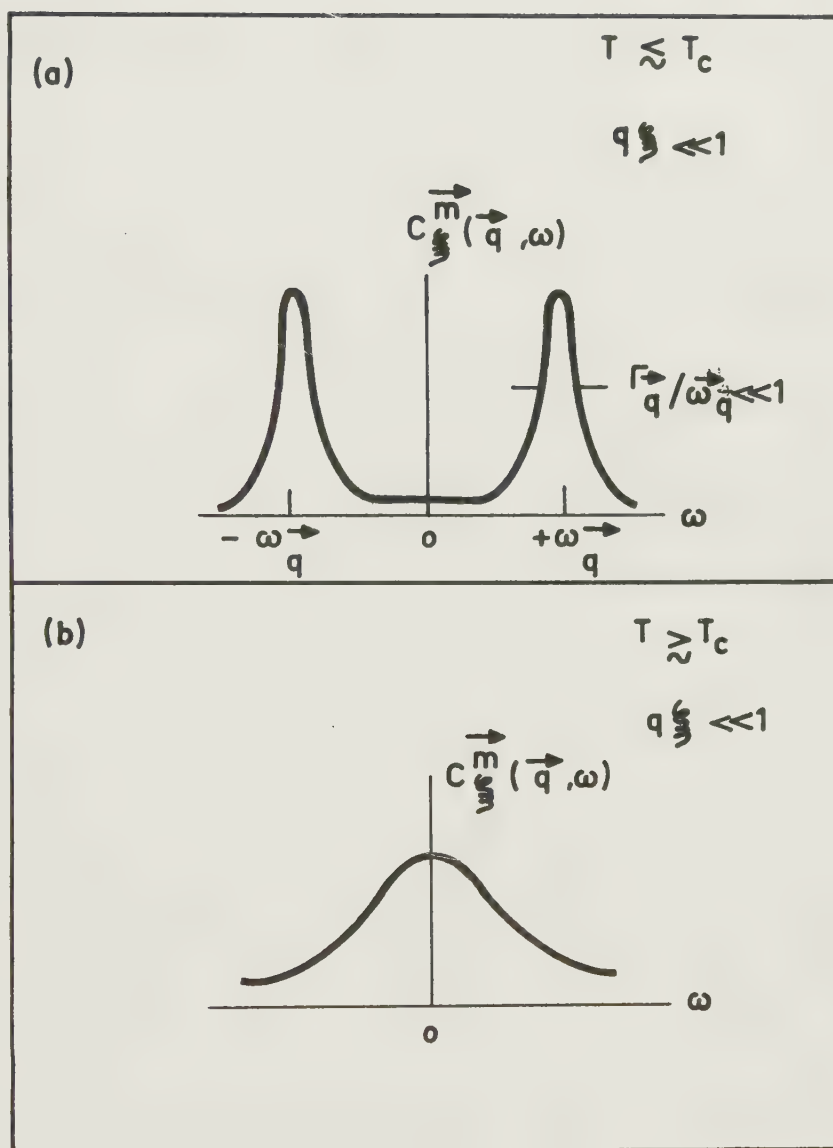


Figure 4

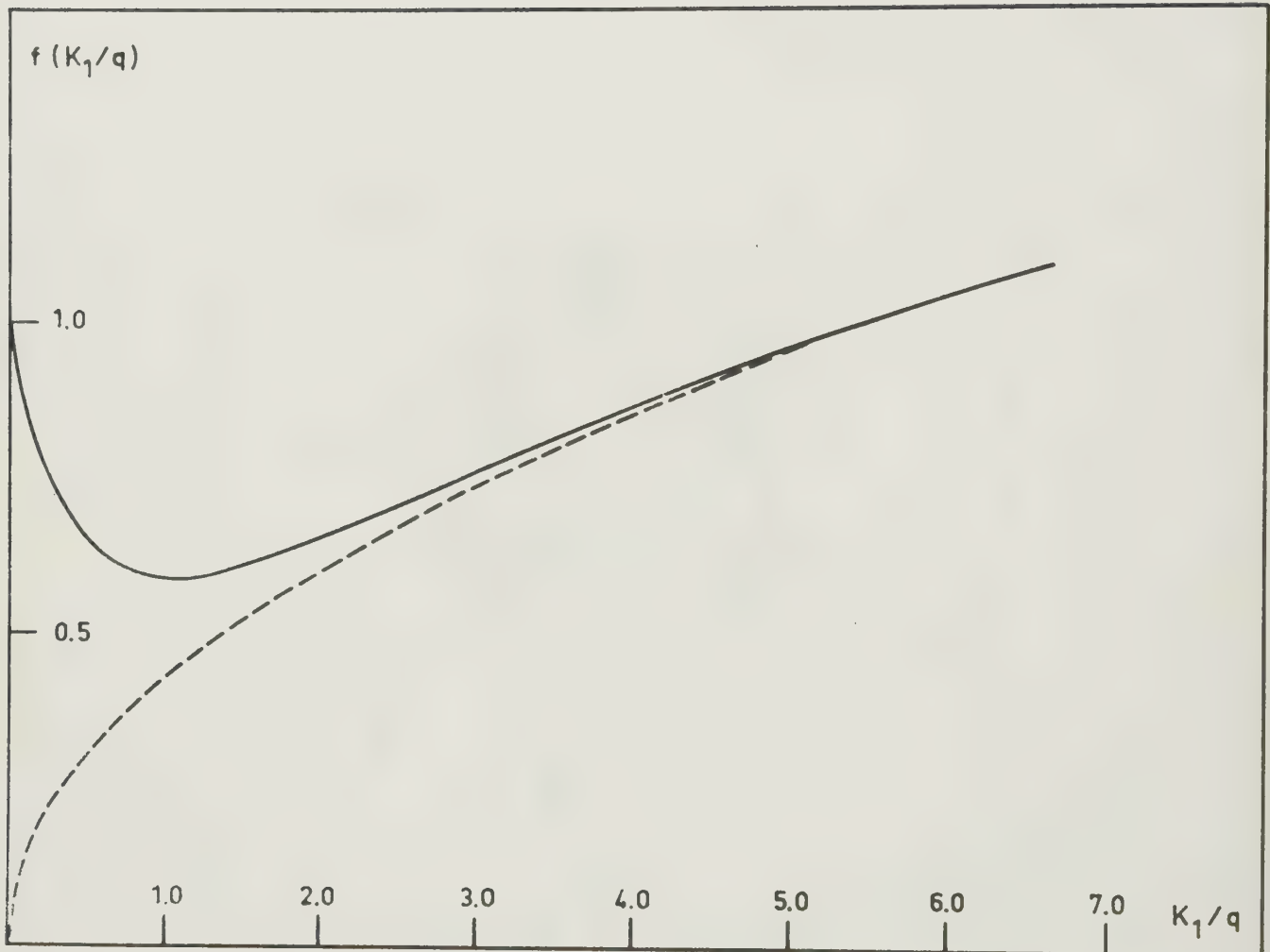
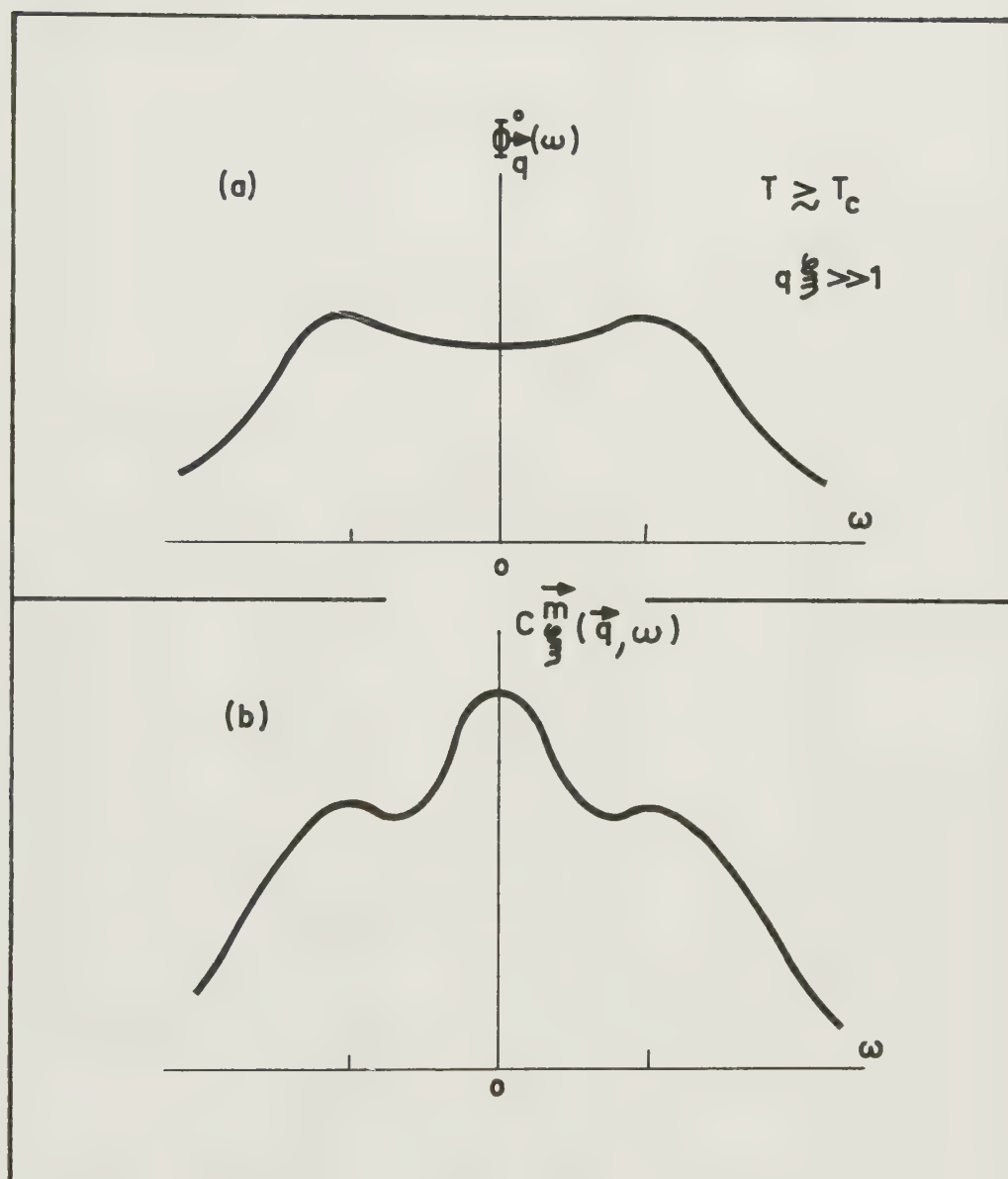


Figure 5



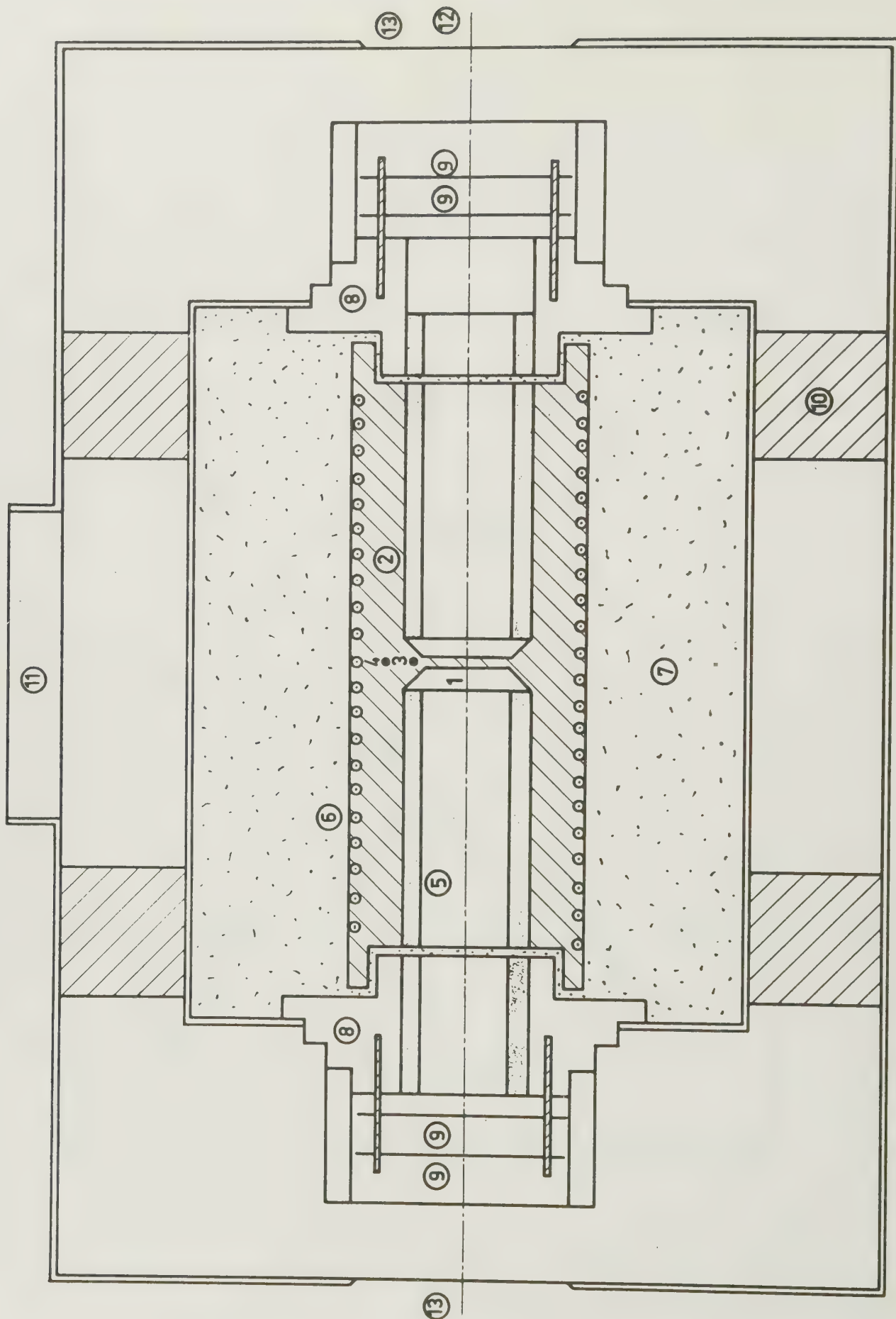


Figure 6

Figure 6

Coupe verticale du four

- ① Echantillon
- ② Cylindre de fer Armco évidé sauf en sa partie centrale (qui constitue l'échantillon 1)
- ③ Position de la soudure chaude du thermocouple chromel-Alumel de mesure
- ④ Position de la soudure chaude du thermocouple chromel-Alumel de régulation
- ⑤ Tube en B_4C (absorbant de neutrons)
- ⑥ Thermocoux chauffant
- ⑦ Feutre de silice
- ⑧ Support d'écrans en céramique
- ⑨ Ecrans thermiques latéraux en molybdène
- ⑩ Gales (inox)
- ⑪ Sortie vers la pompe à vide (vide secondaire)
- ⑫ Axe du faisceau des neutrons incidents
- ⑬ "Fenêtres" pour les neutrons (0,5 mm d'aluminium).

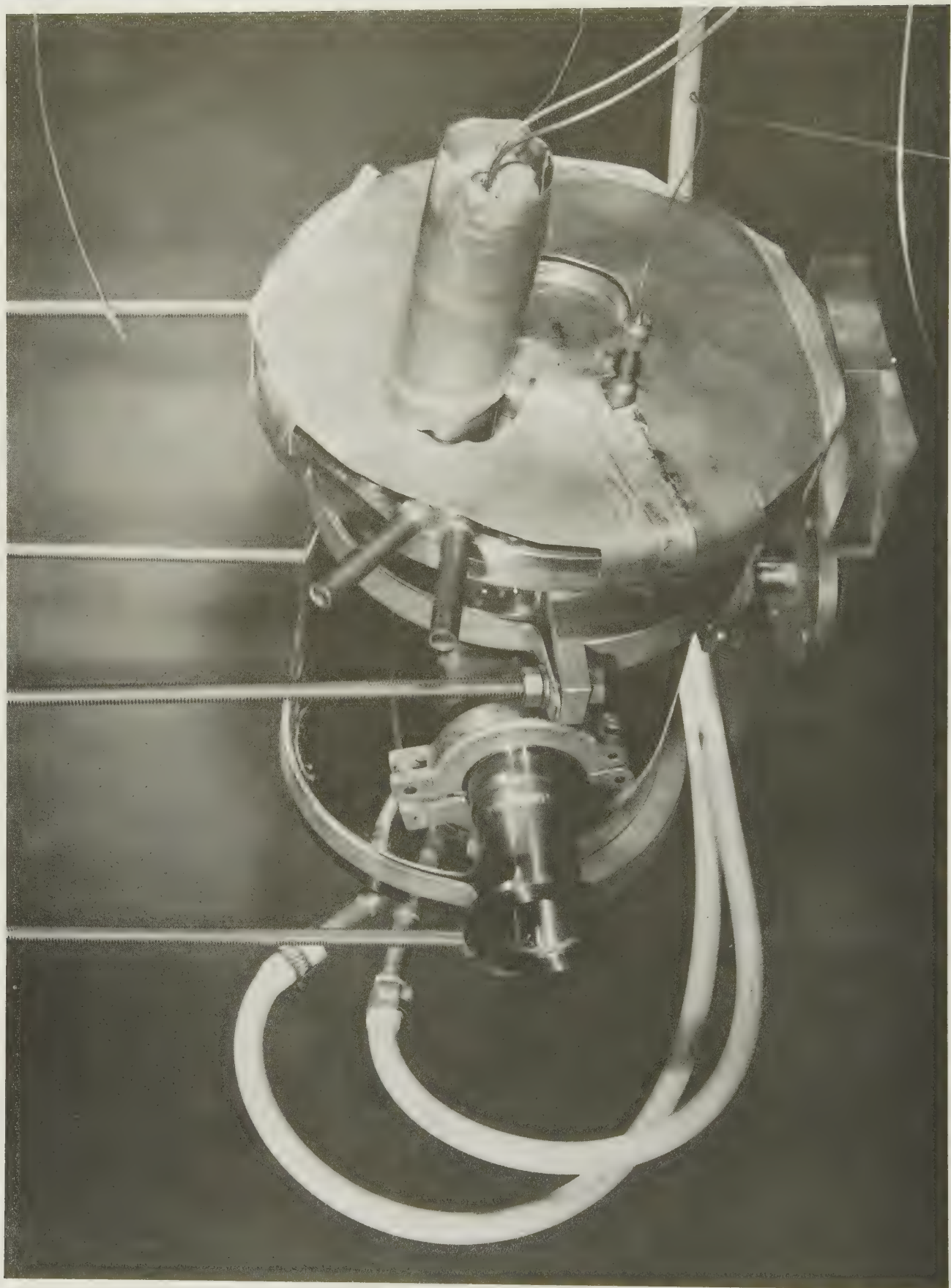


Figure .8

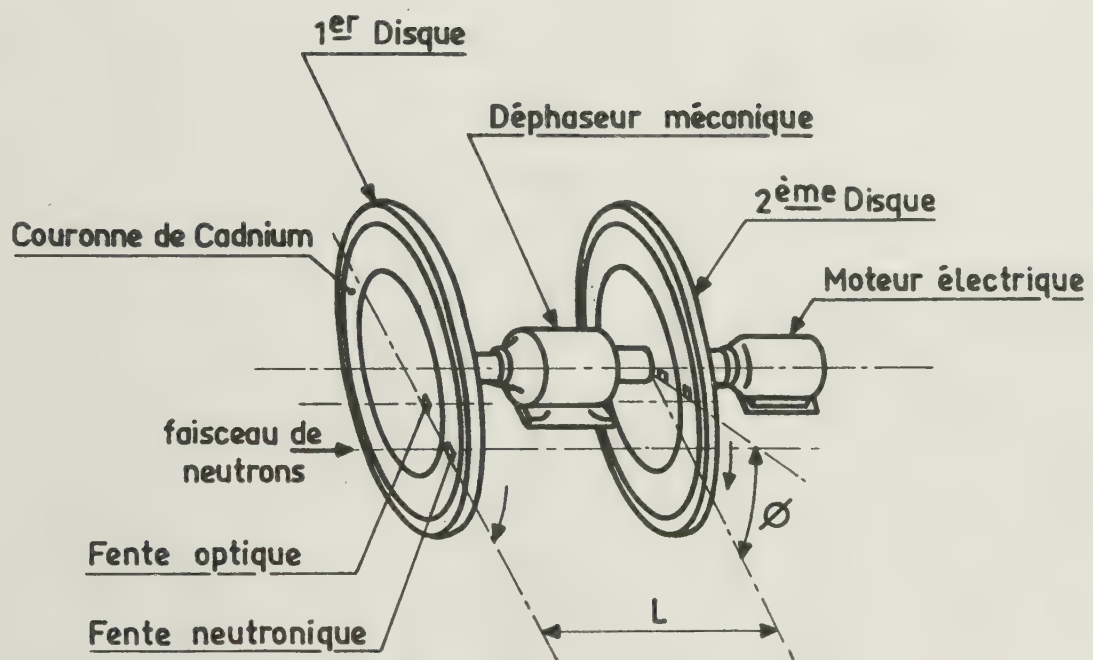


Figure 9

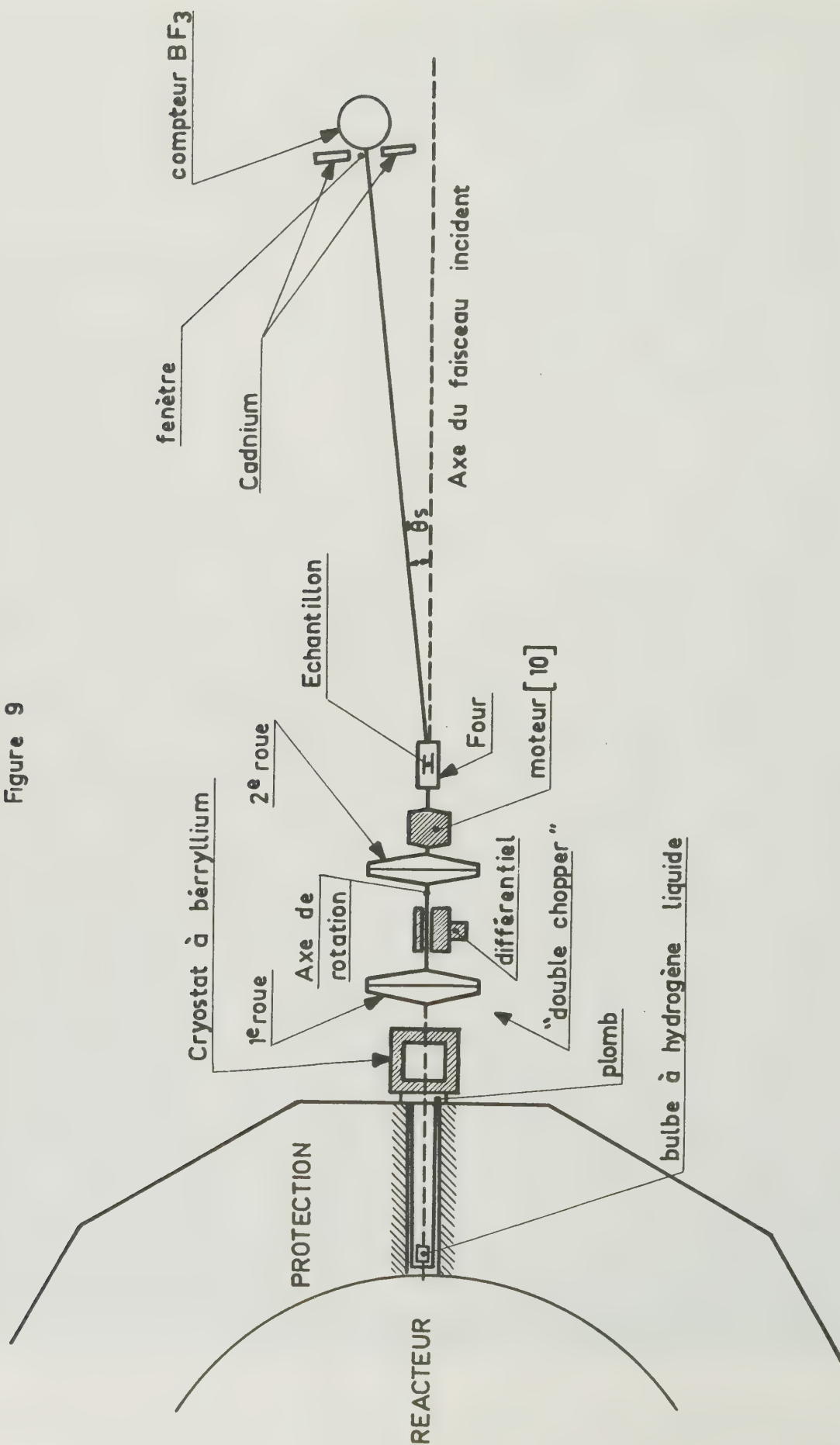


Figure 10

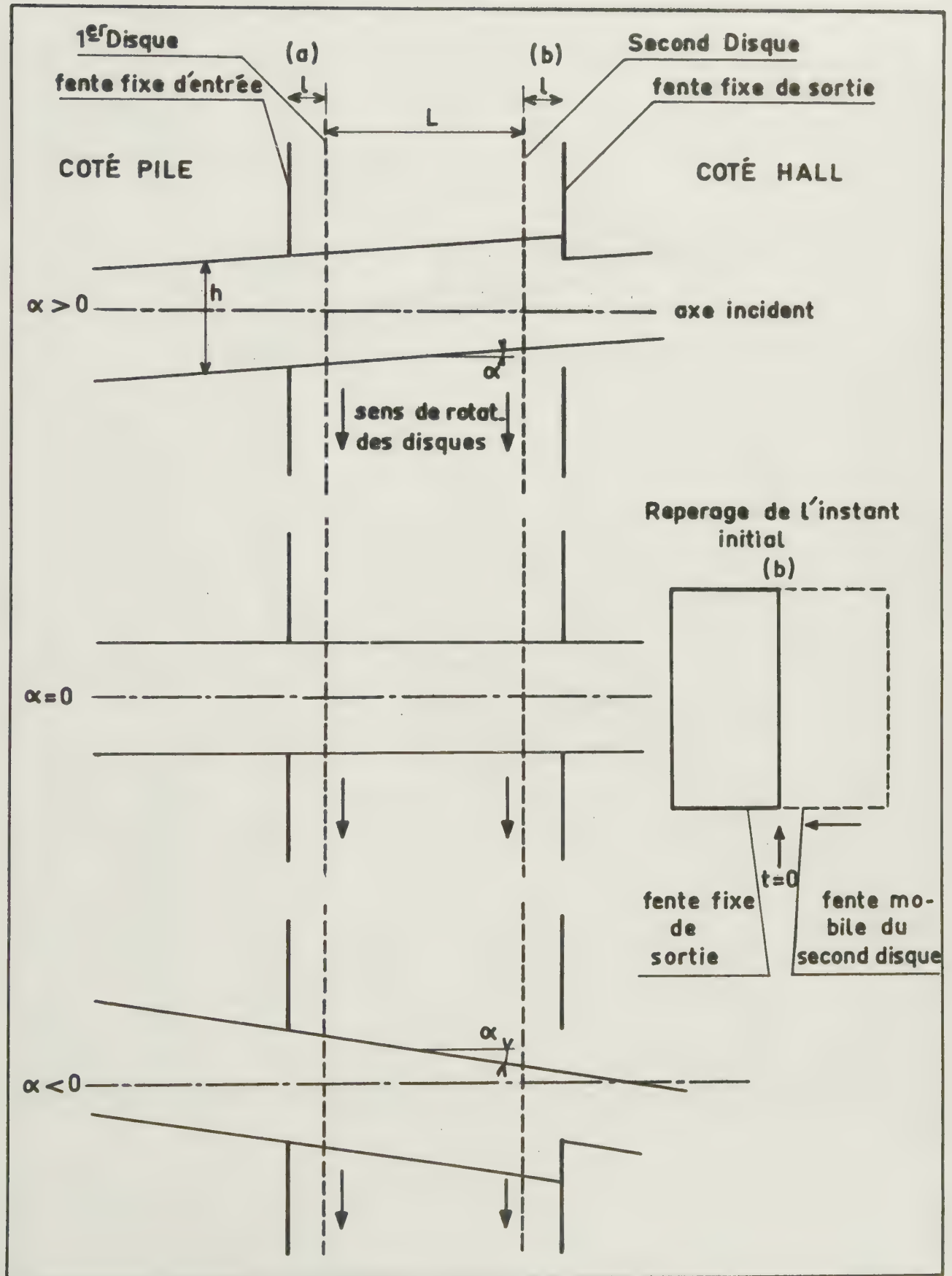


Figure 11

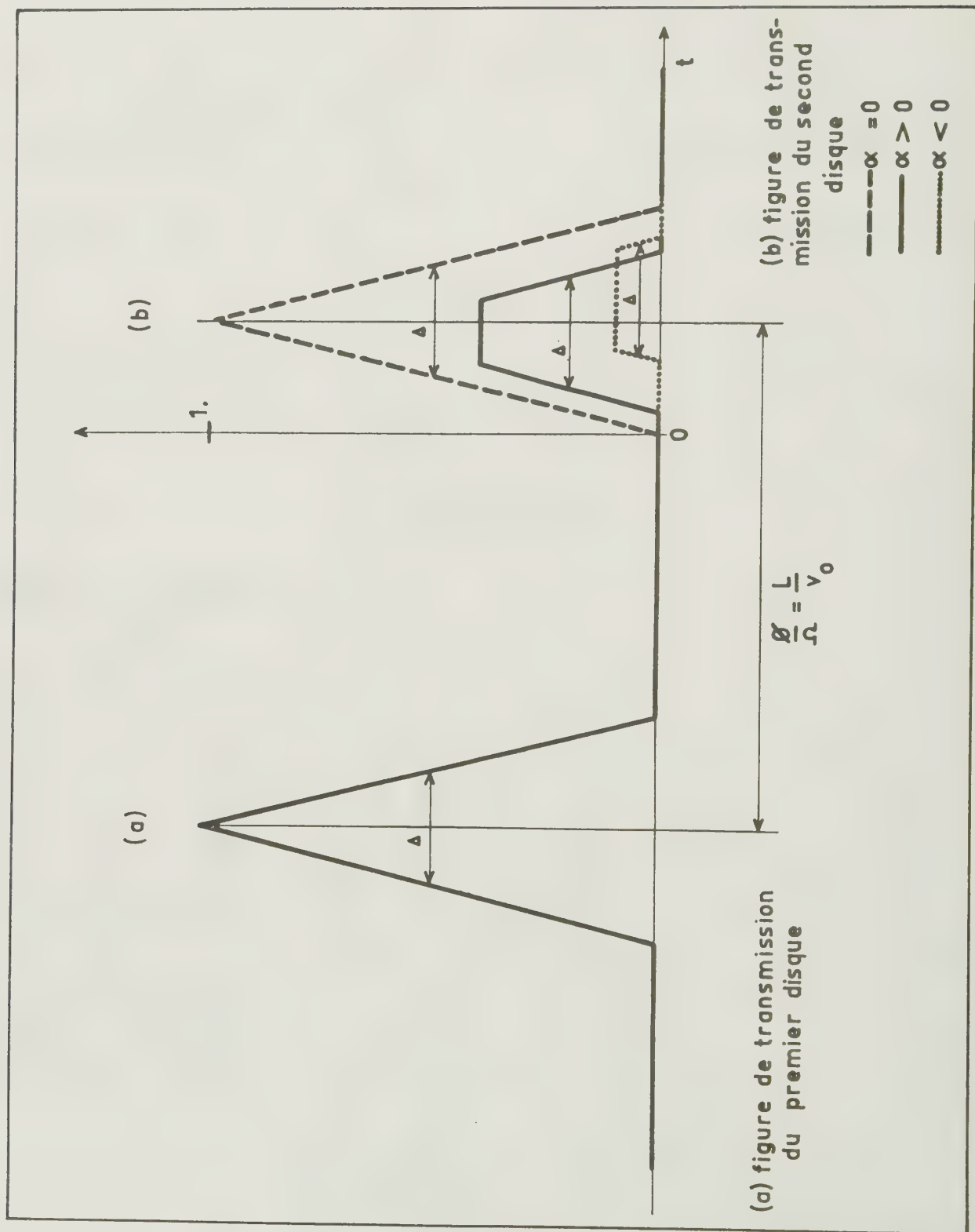


Figure 12

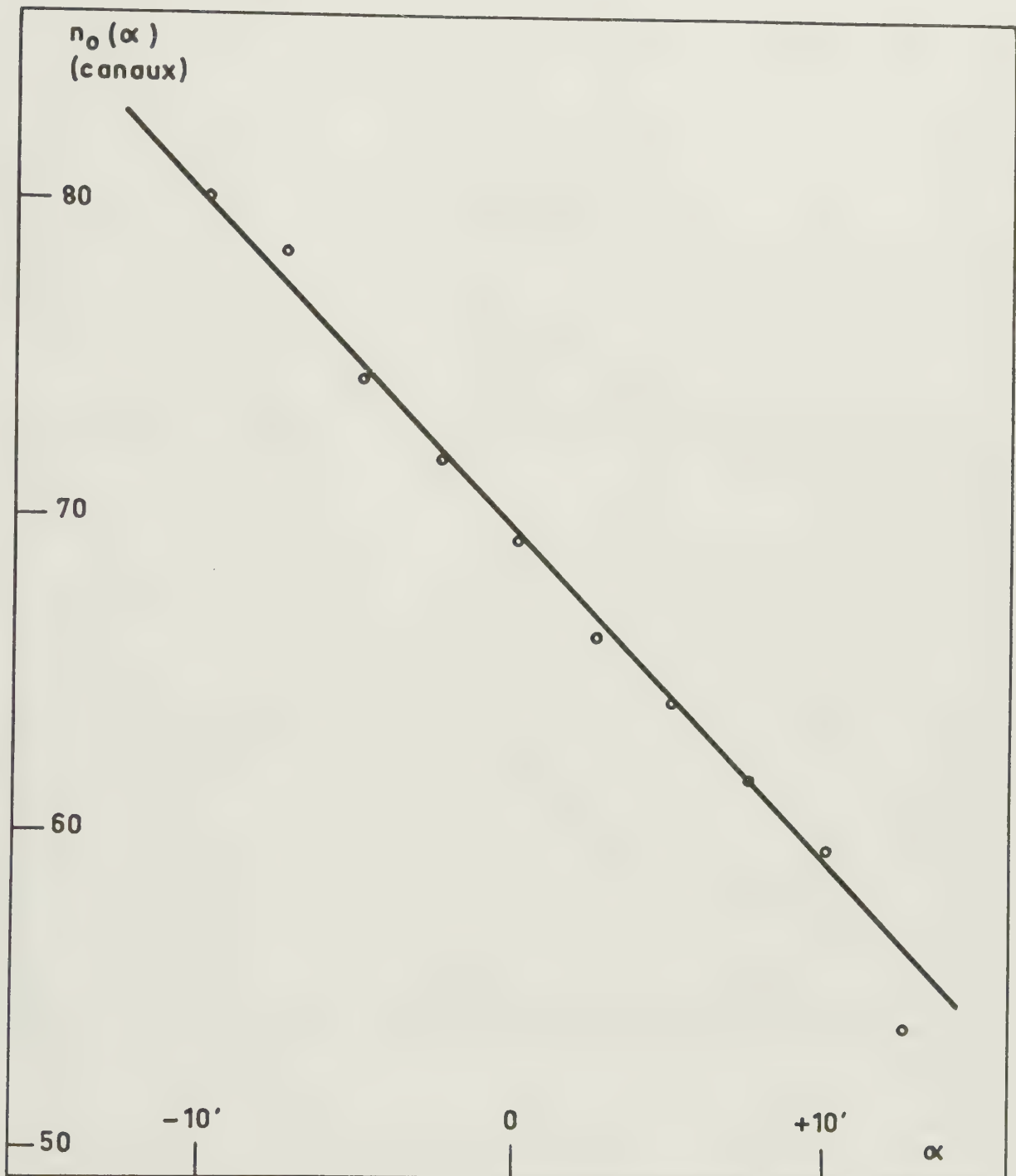


Figure 13

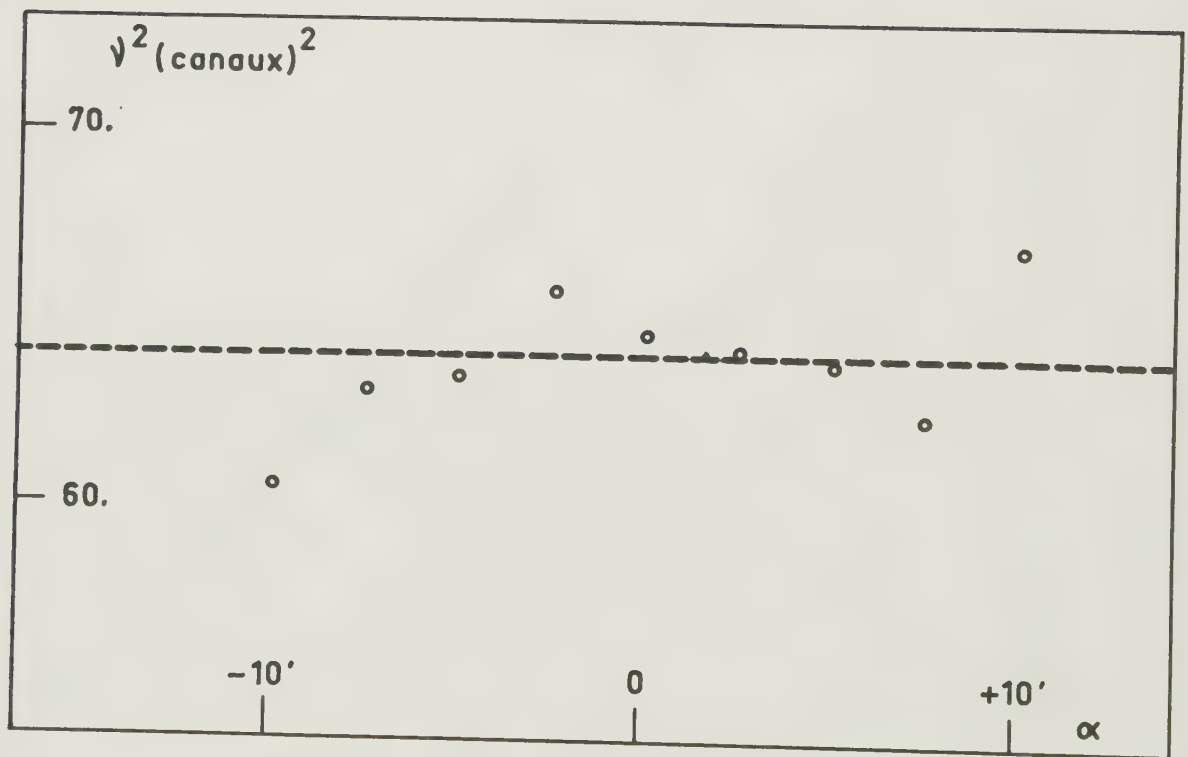


Figure 14

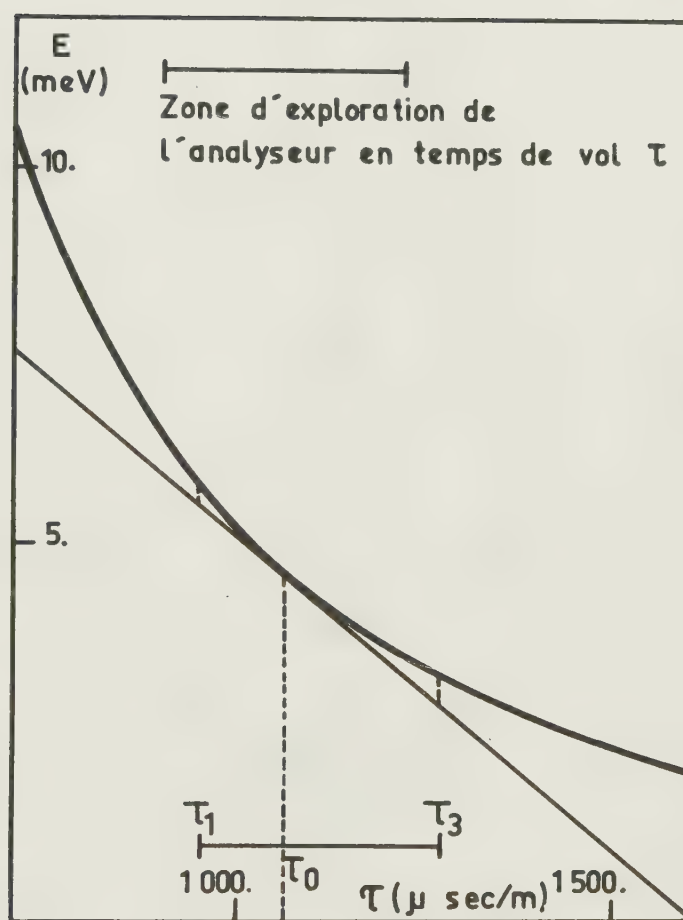


Figure. 15

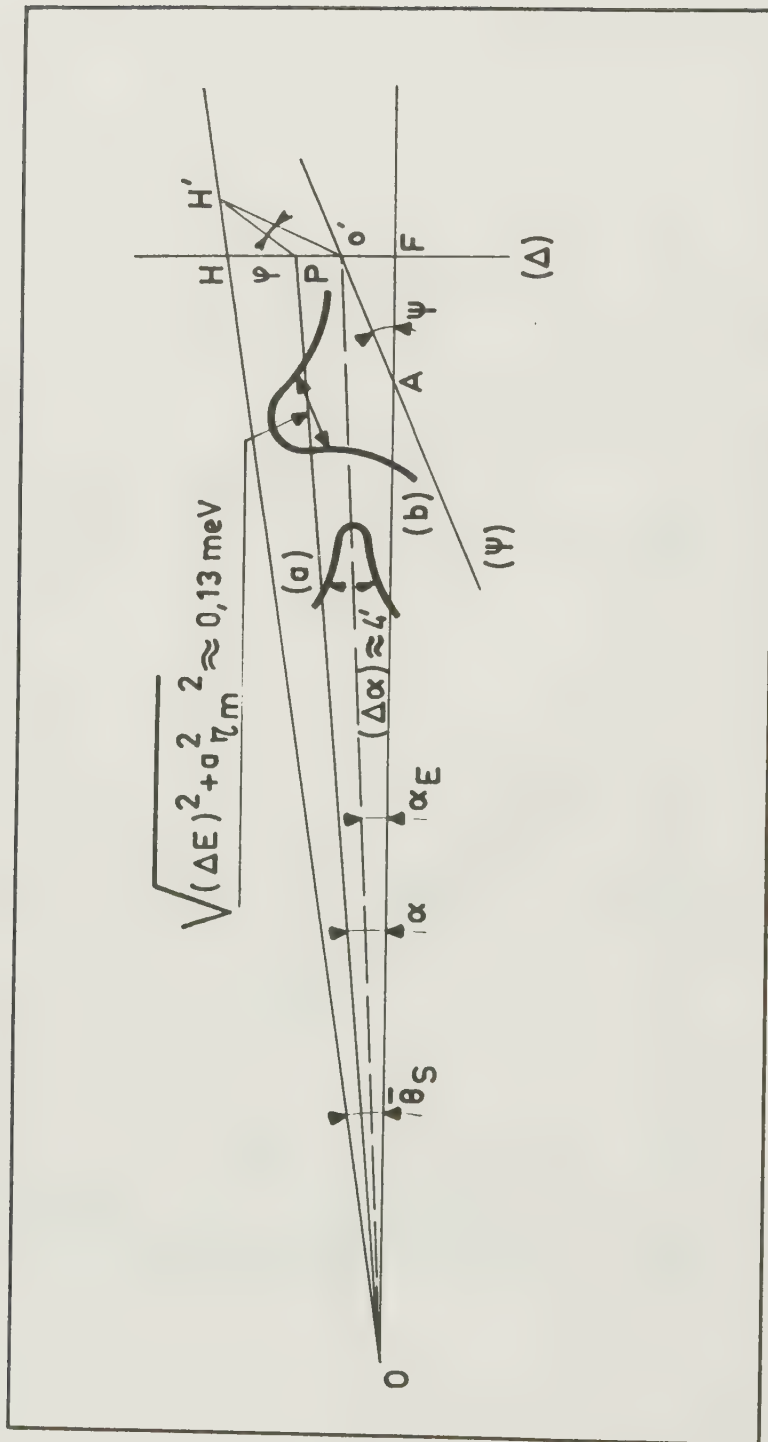


Figure 16

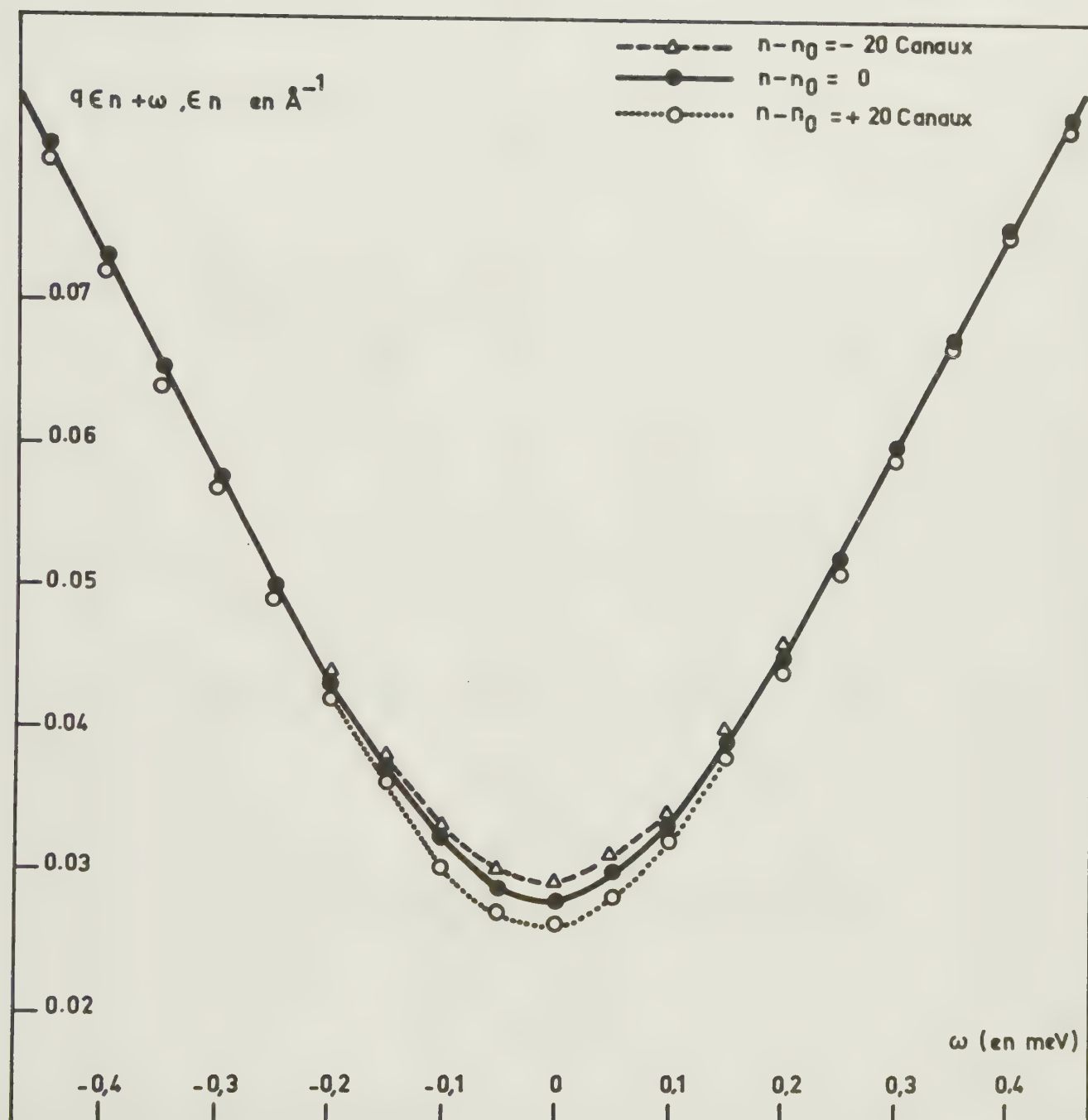


Figure 17

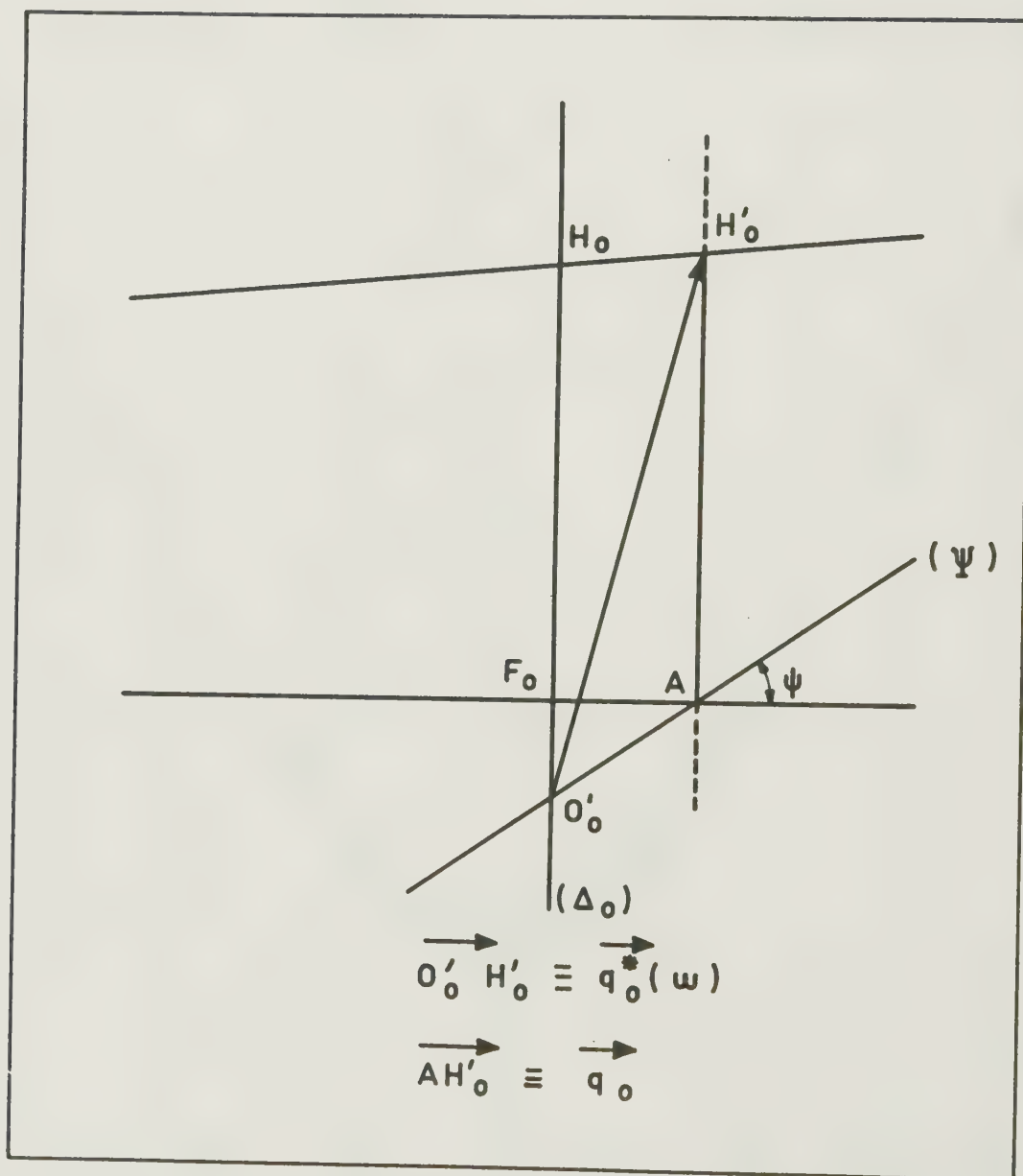


Figure 18

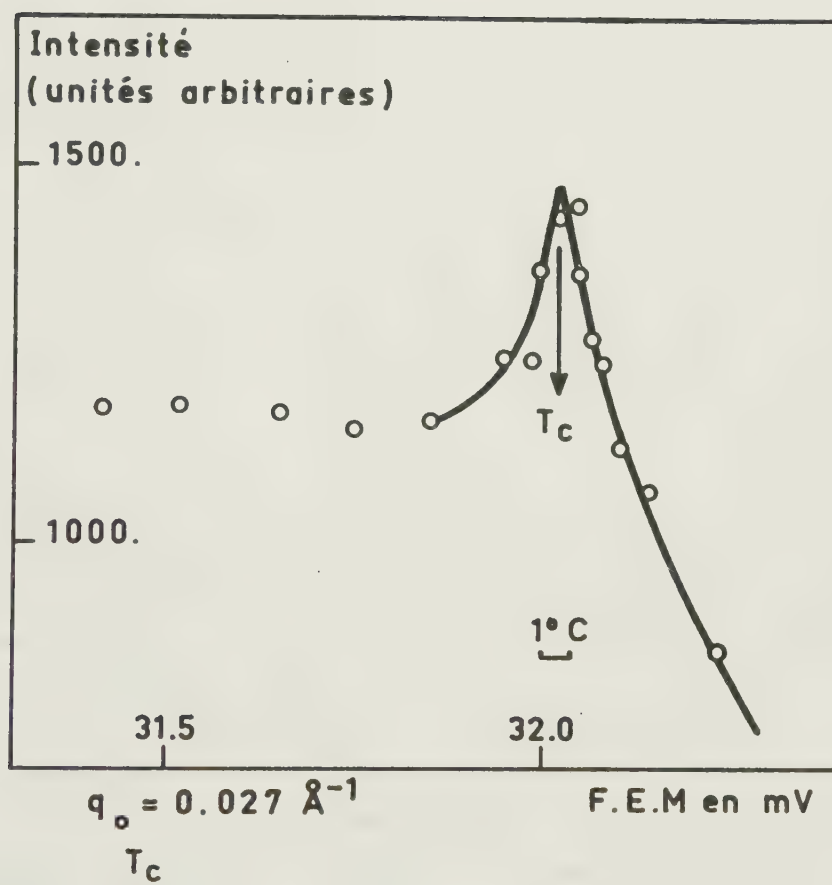


Figure 19

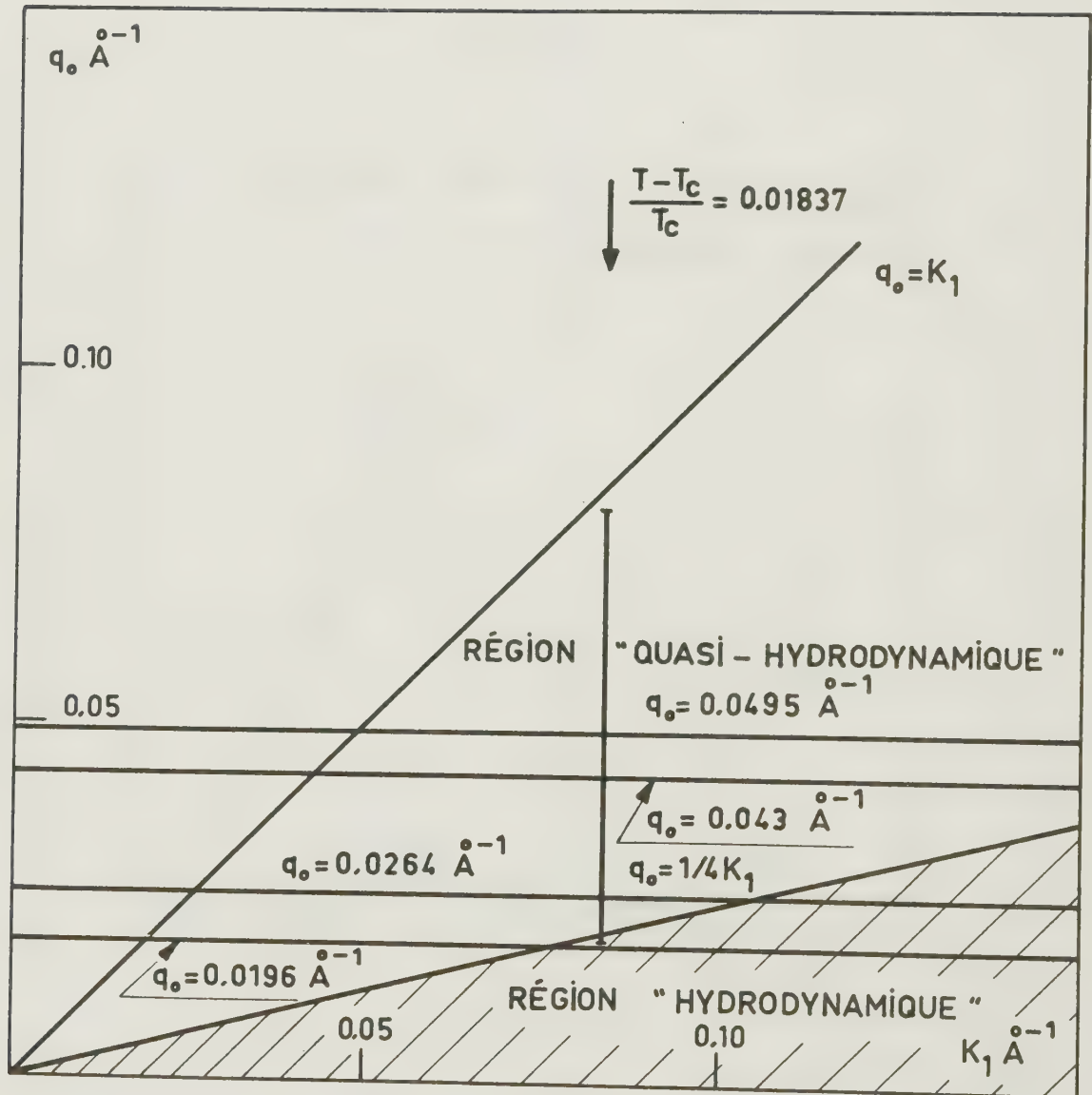


Figure 20

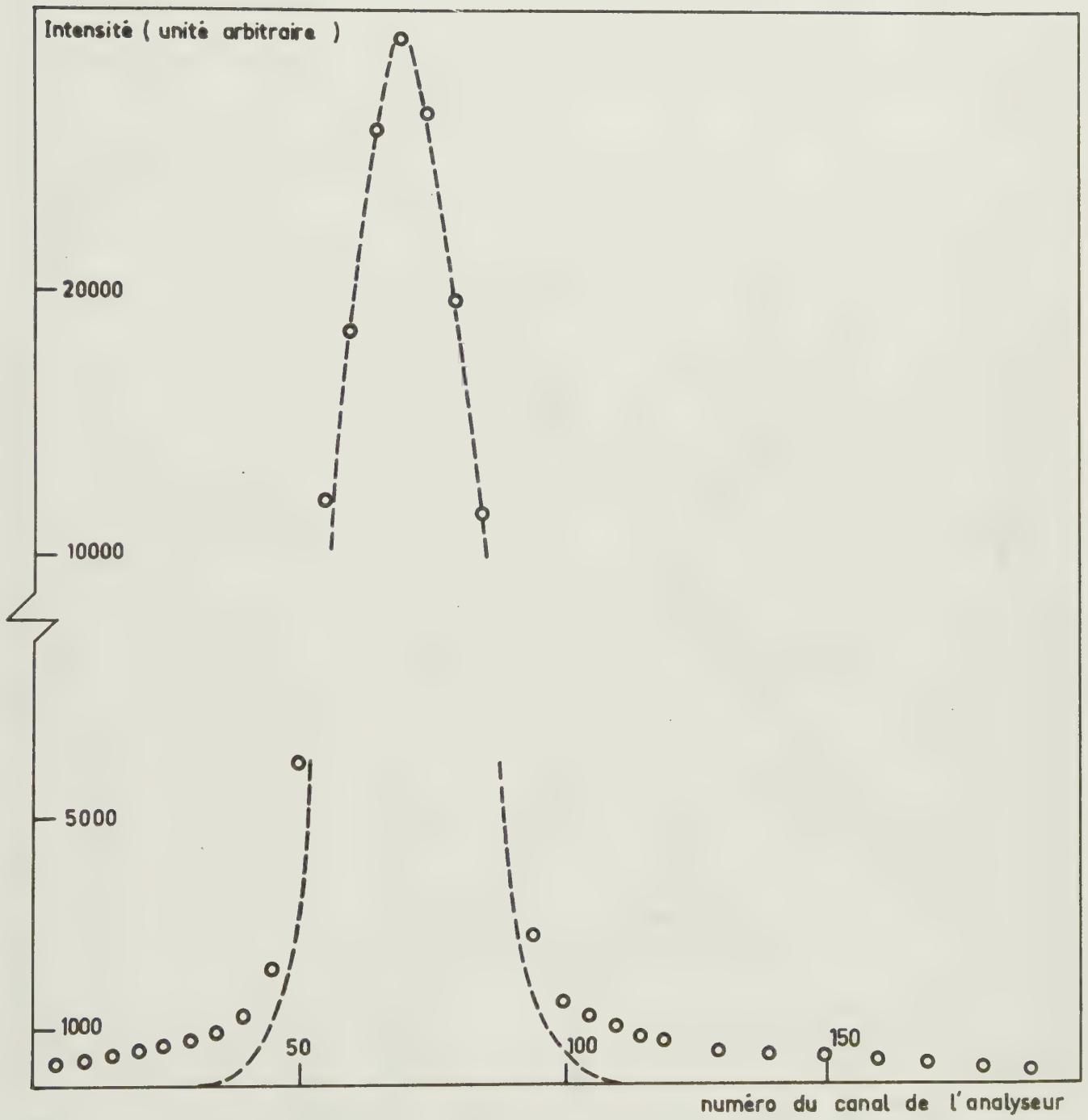


Figure 21

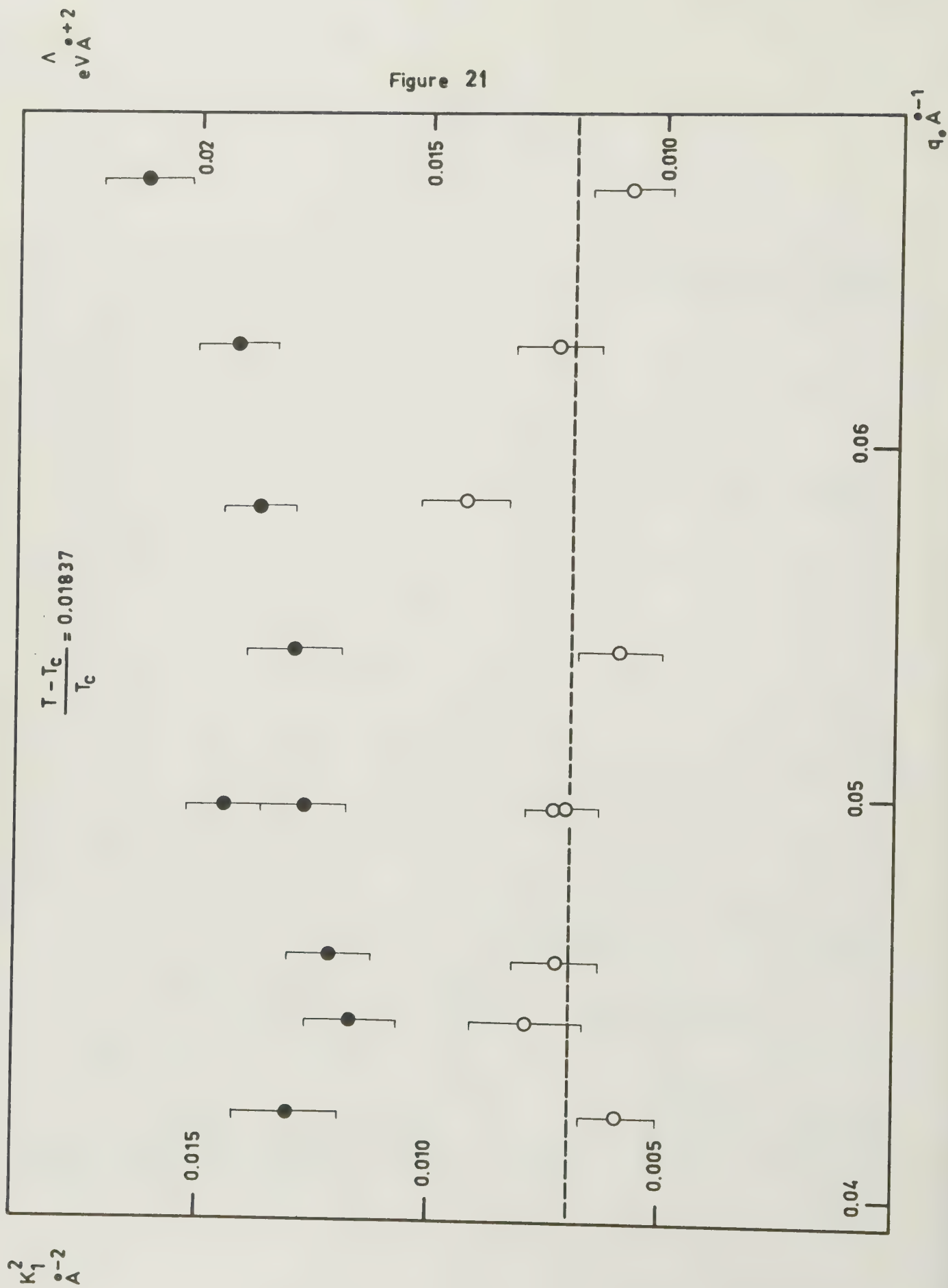


Figure 22

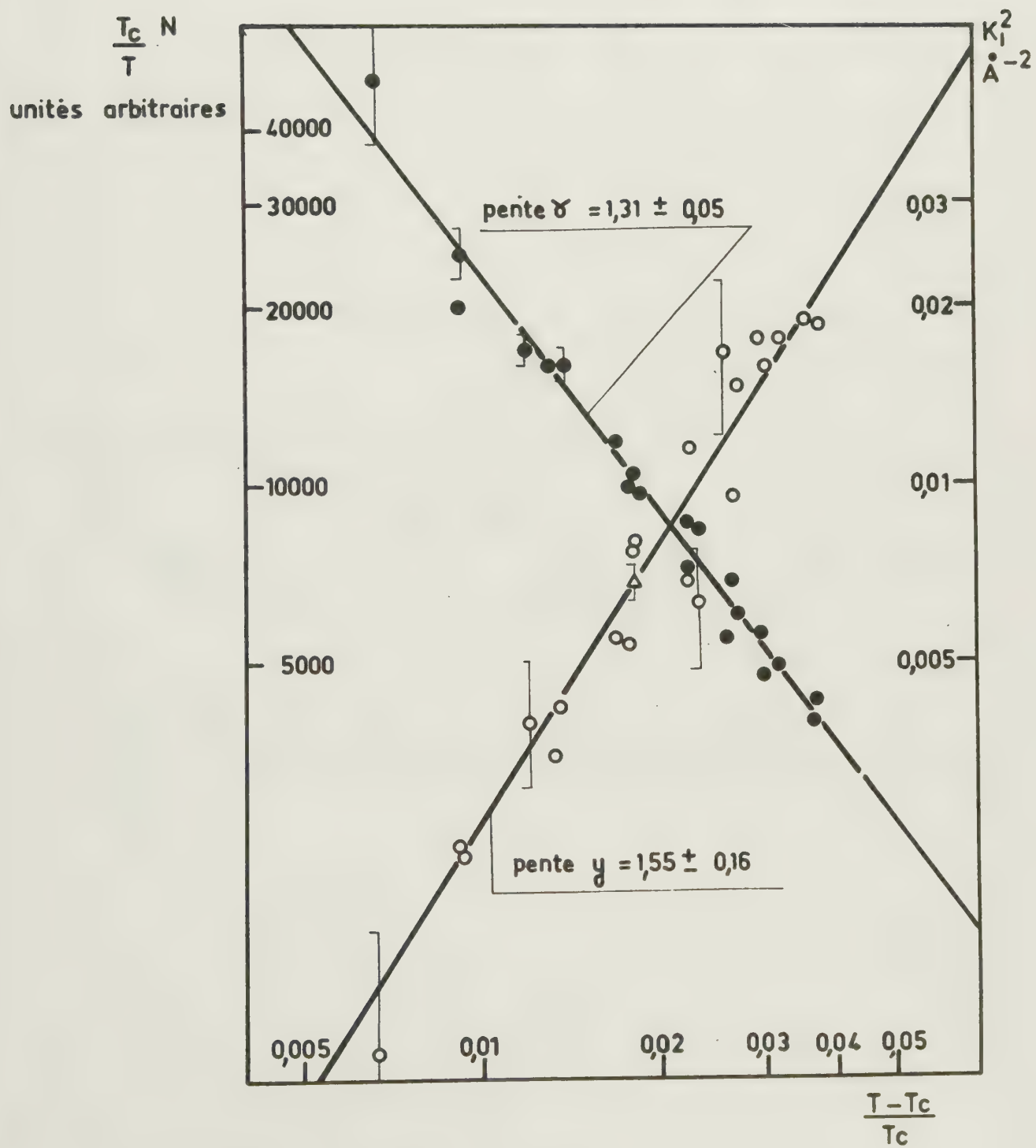


Figure 23

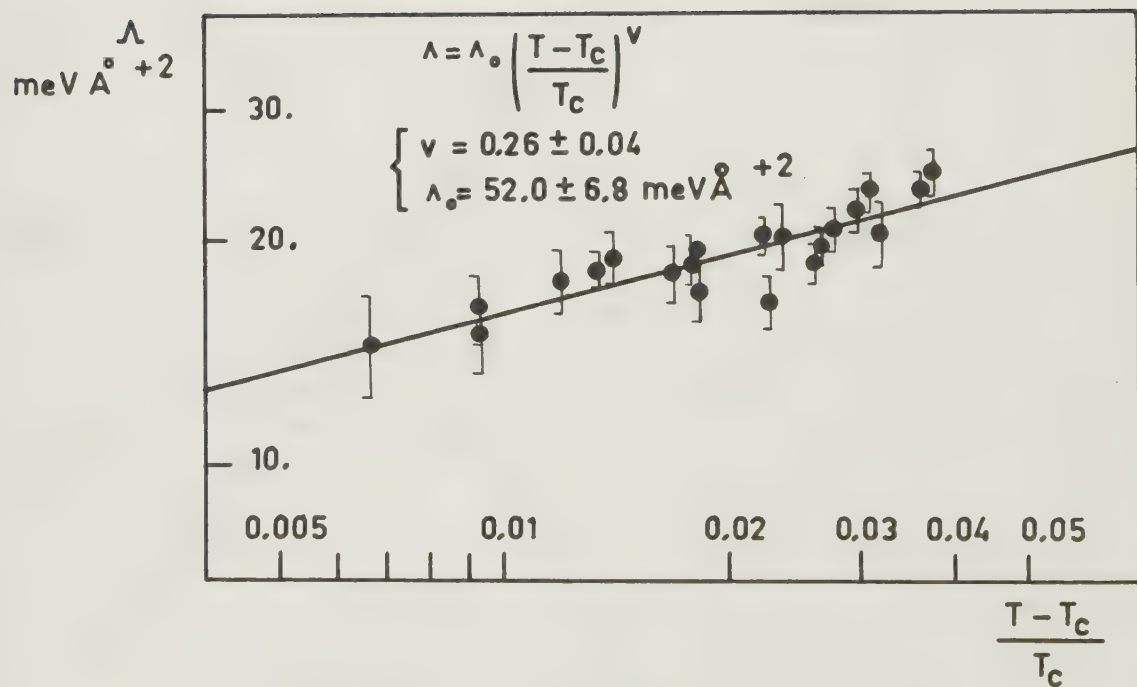


Figure 24

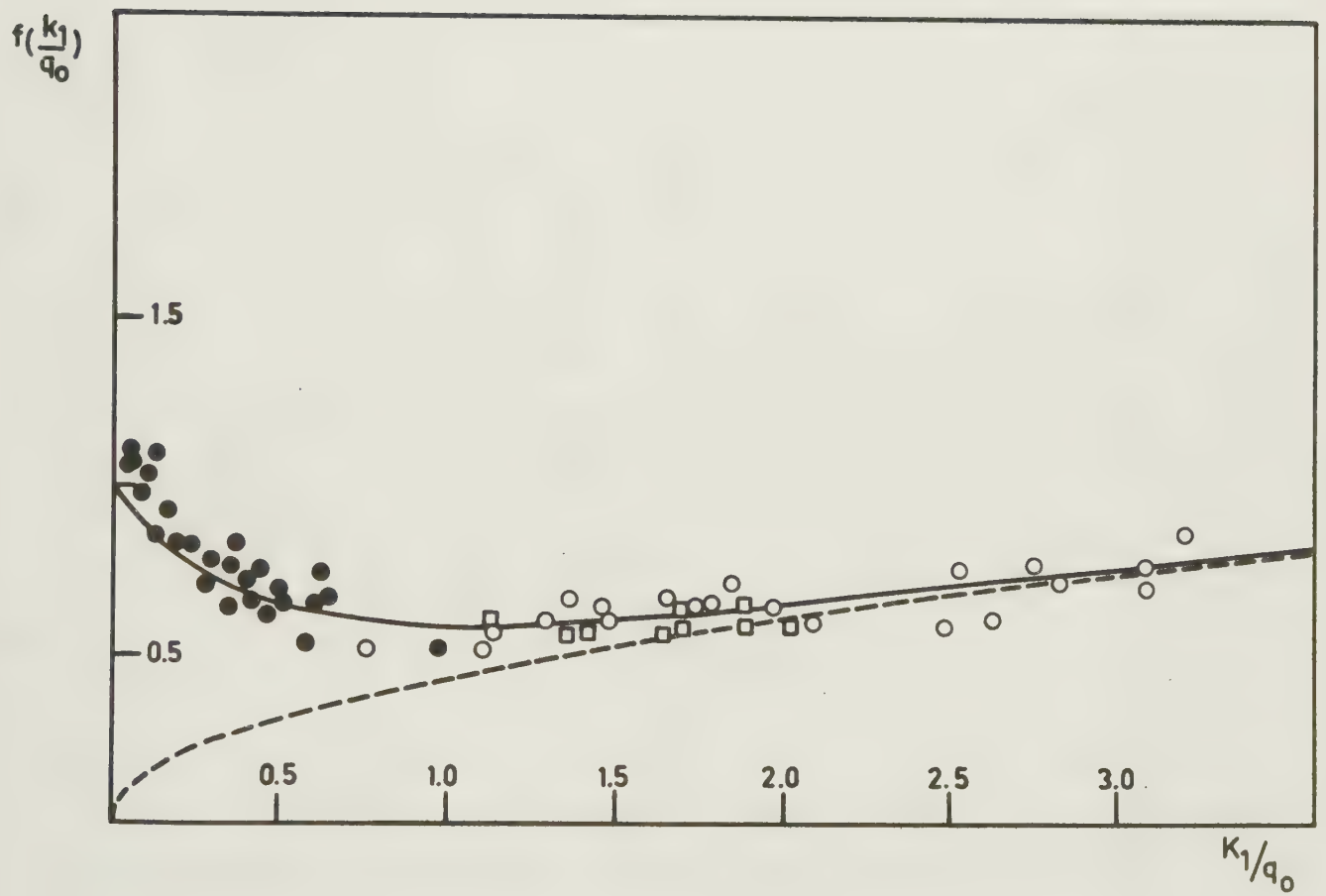


Figure 25

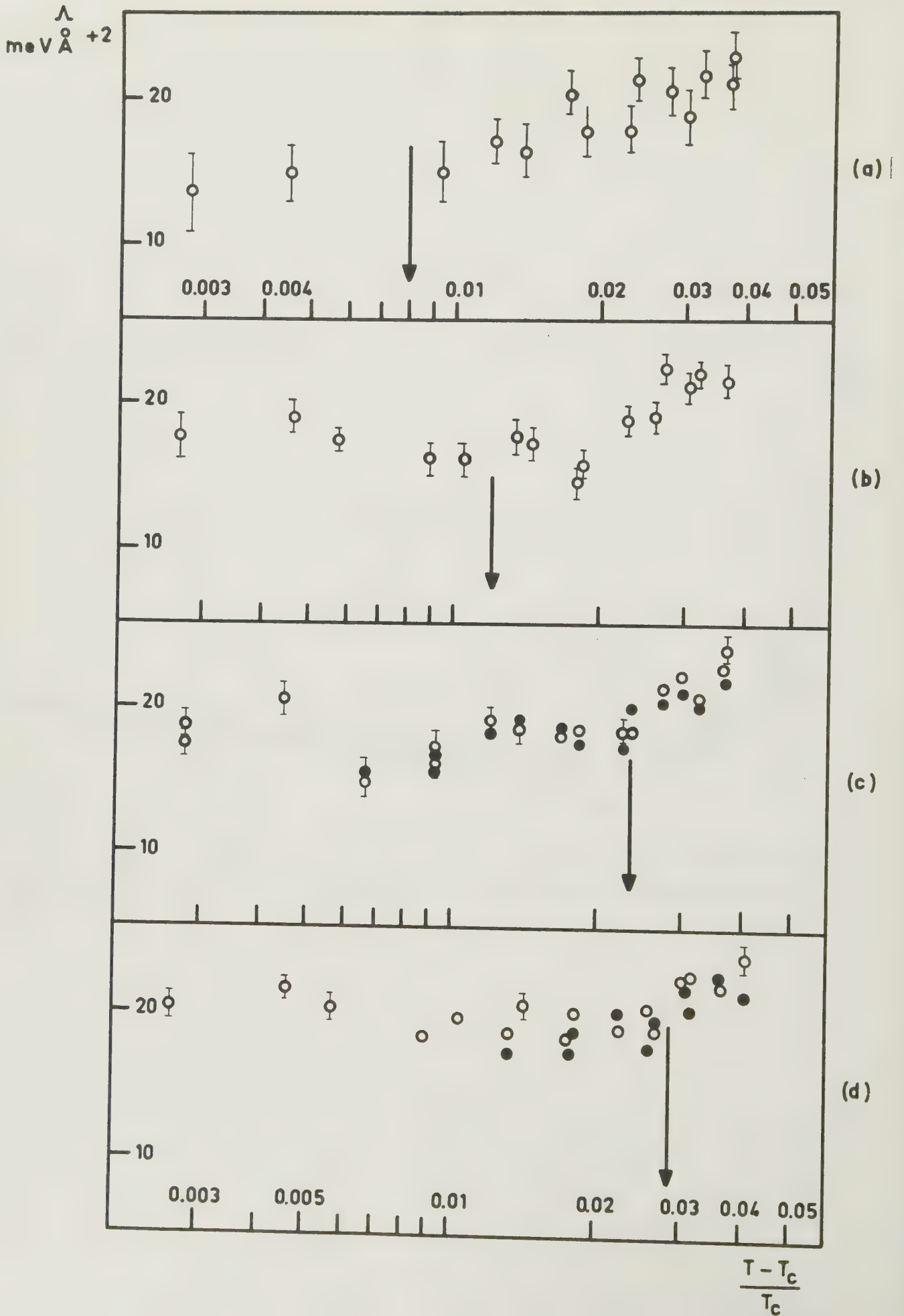


Figure 26

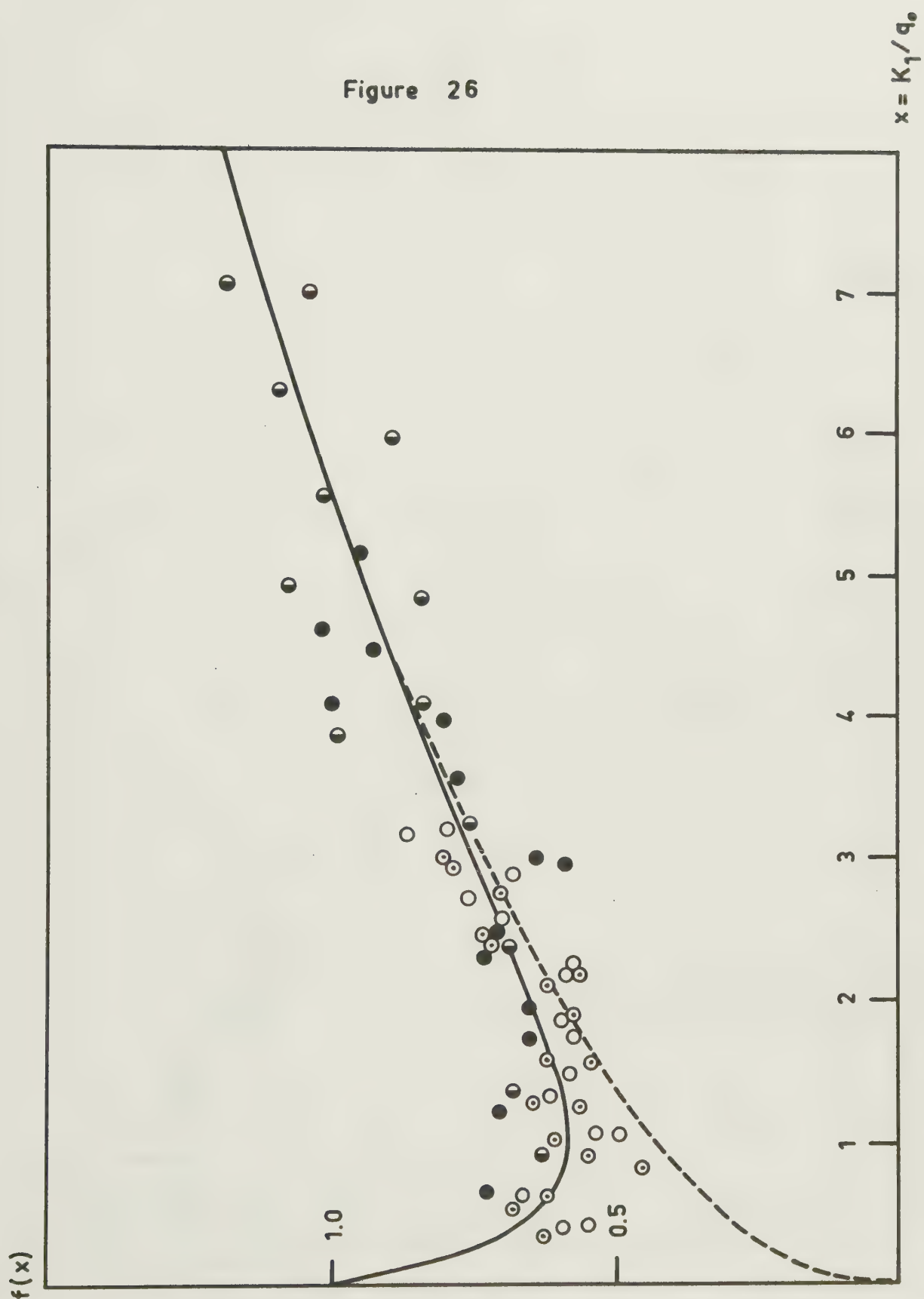


Figure.27

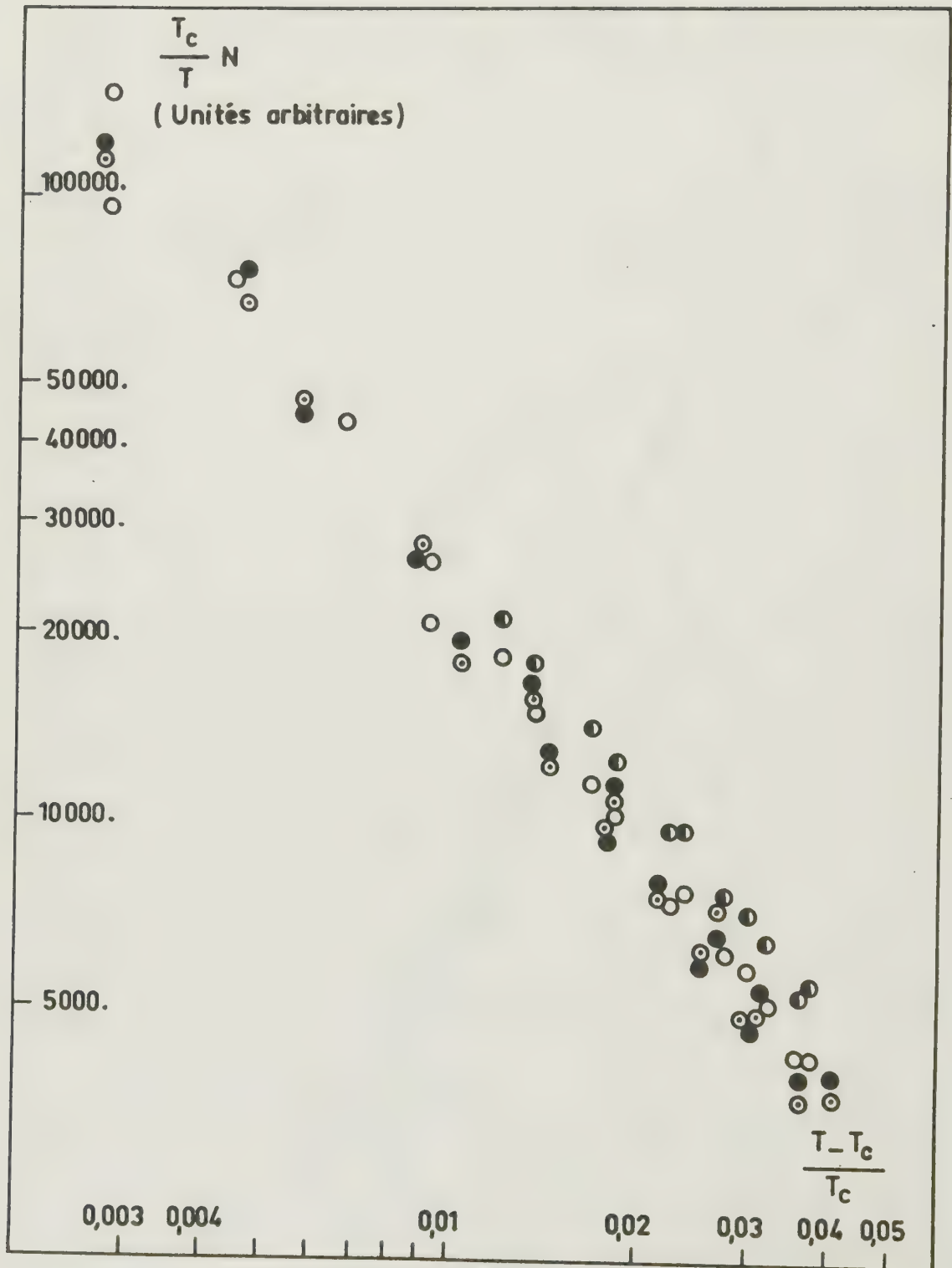


Figure 28

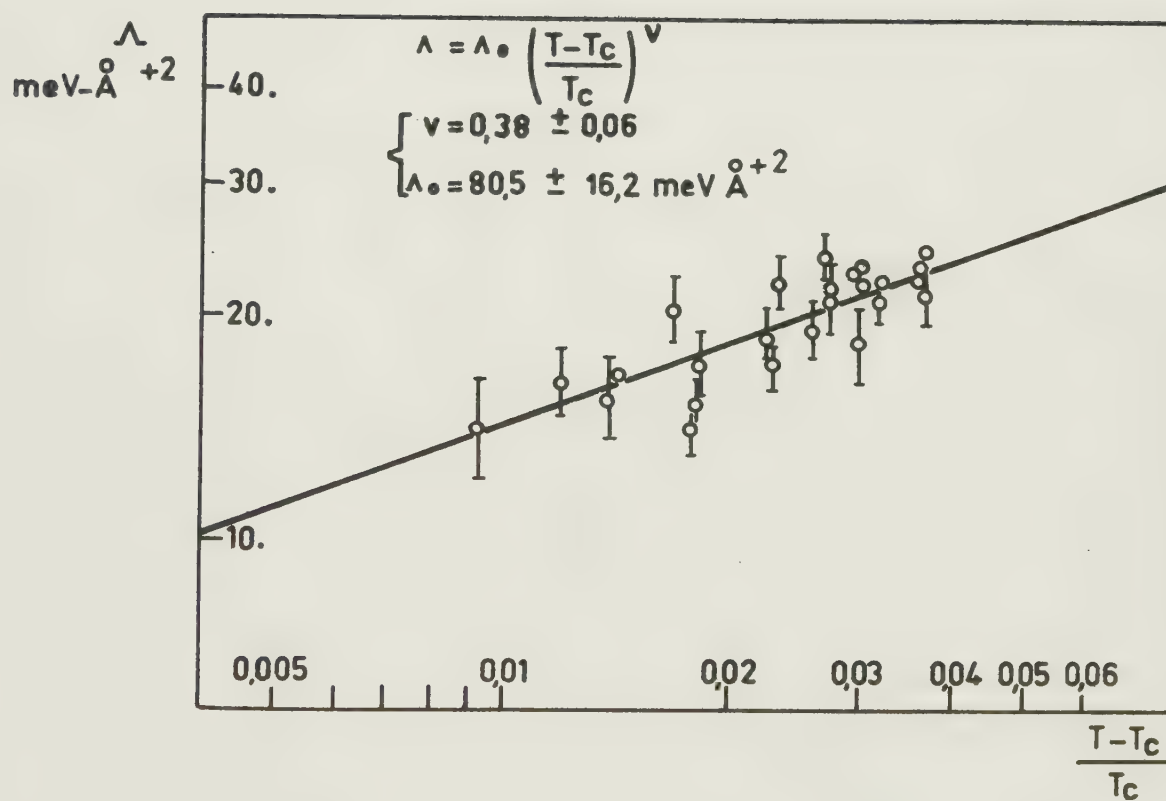


Figure 29

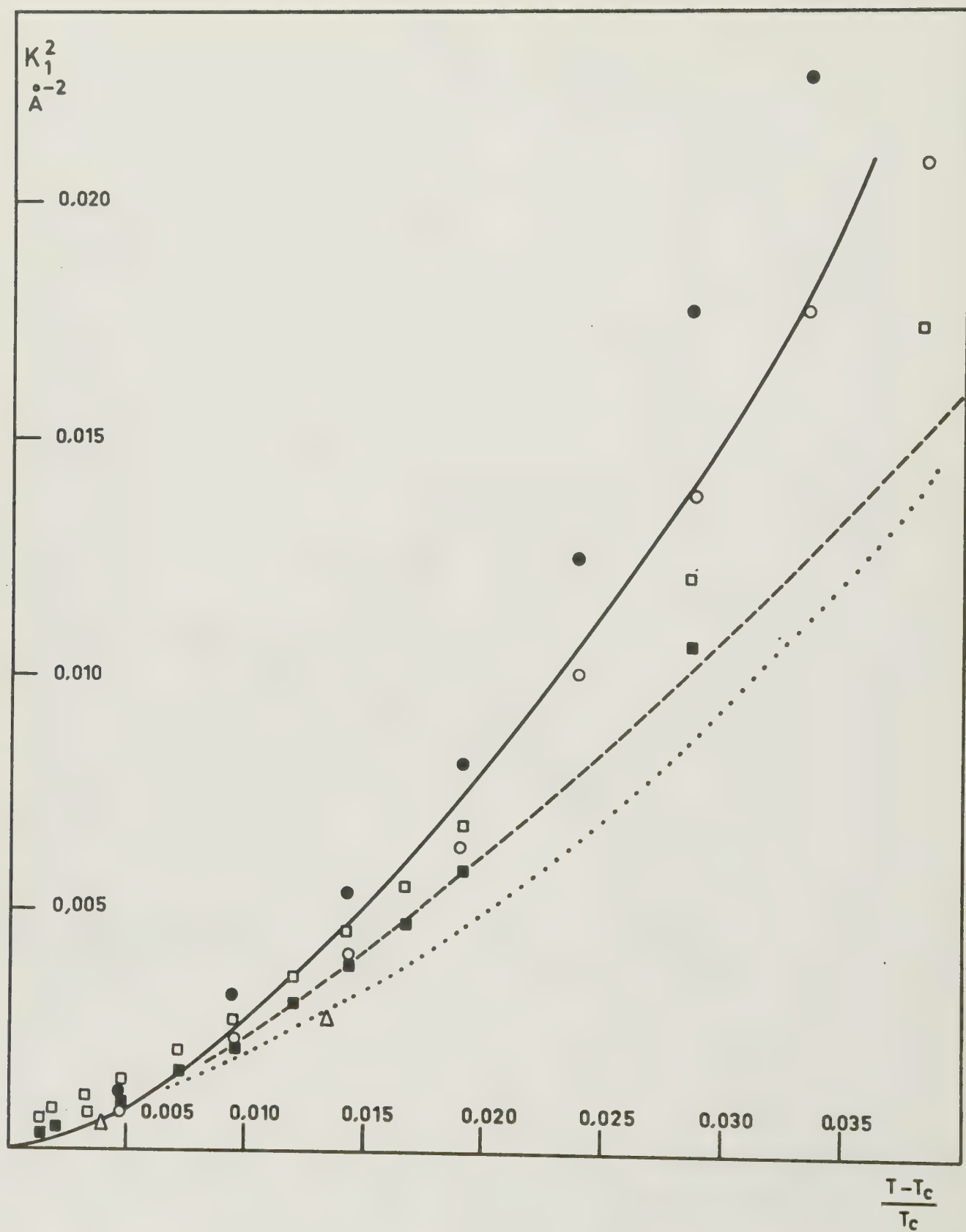
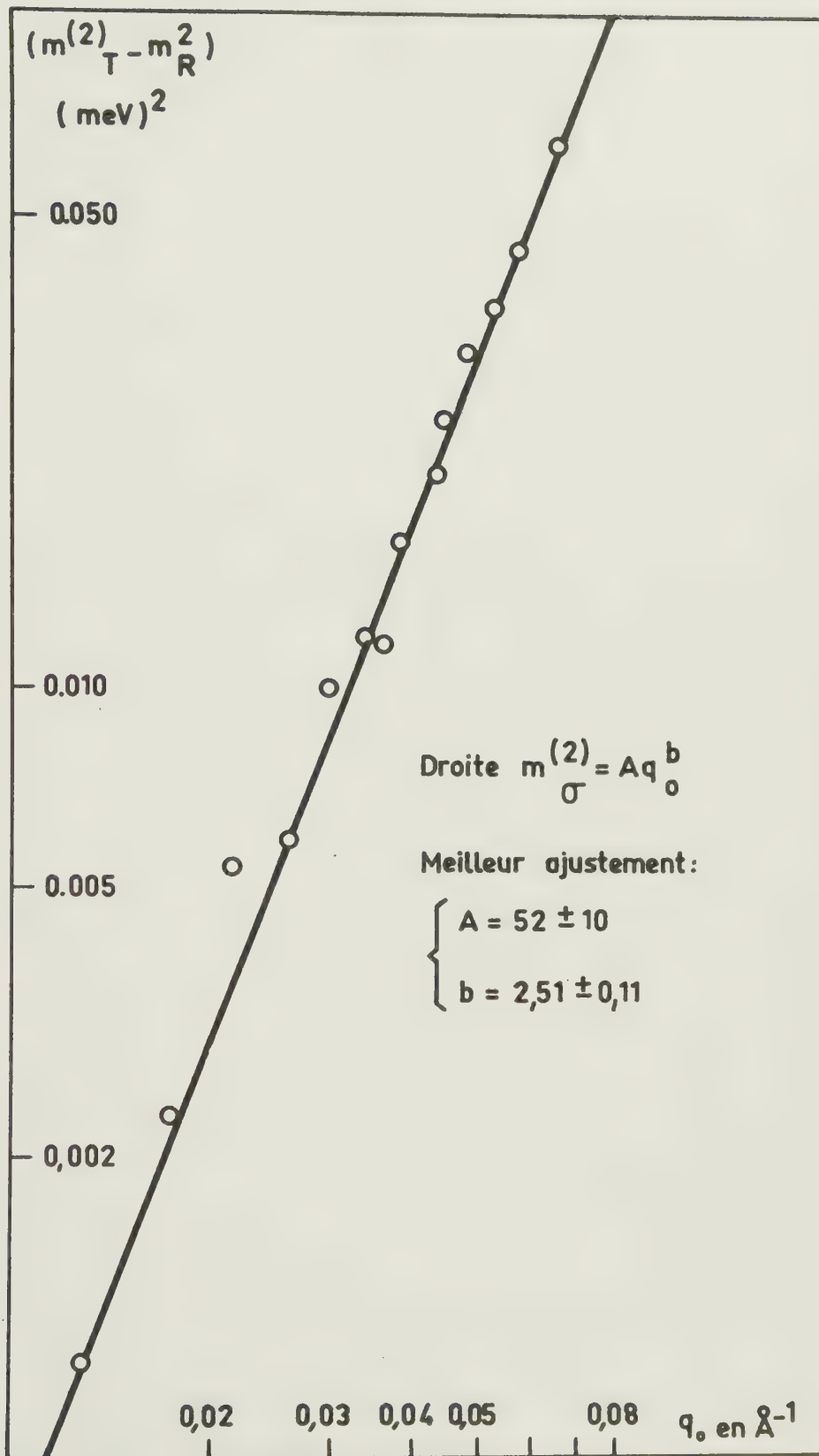
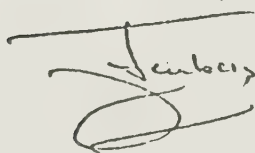


Figure 30



Vu et approuvé
Orsay, le 21 avril 1971
Le Vice-Président du Centre d'Orsay

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Jeanberg". The signature is written in a cursive style with a horizontal line above the name and a large, stylized loop at the bottom.

